

Схемы типа Годунова в вычислительной газовой динамике  
IV. Реконструкции-ограничители: выход за красные флажки

Родионов Александр Владимирович



# Область существования TVD-схем

□ **Sweby P.K.** High Resolution Schemes Using Flux Limiters for Hyperbolic Conservation Laws // SIAM J. Numer. Anal., 1984

Уравнение переноса:  $\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0$  при  $a = \text{const} > 0$ .

Численная схема:  $\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a \frac{u_{i+1/2}^{n+1/2} - u_{i-1/2}^{n+1/2}}{\Delta x} = 0$ .

MUSCL-схема:  $u_{i+1/2}^{n+1/2} = u_i^n + 0.5(1 - \nu) \Delta u_i^n$ ,

где  $\nu = C_{CFL} = a \Delta t / \Delta x$

Формулировка Свеби:  $\Delta u_i^n = \phi(r_i) (u_{i+1}^n - u_i^n)$ , где  $r_i = \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{u_{i+1}^n - u_i^n}$

## Линейные схемы второго порядка точности

Правая разность: схема Лакса-Вендроффа  $\phi = 1$

Центральная разность: схема Фромма  $\phi = (1 + r) / 2$

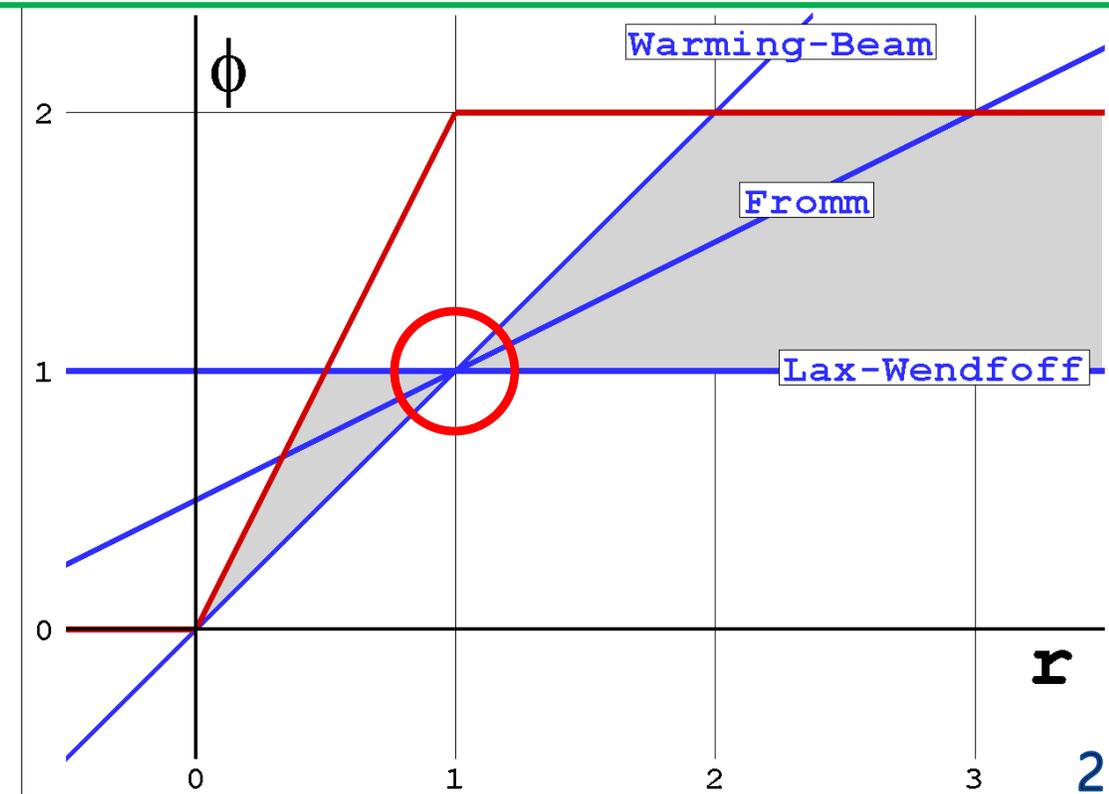
Левая разность: схема Уорминга-Бима  $\phi = r$

## Ограничитель ван Ли (TVD-условие Хартена)

Разности разного знака  $\phi = 0$

Удвоенная правая разность  $\phi = 2$

Удвоенная левая разность  $\phi = 2r$



# Схемы Лакса-Вендроффа, Фромма и Уорминга-Бима

## Аппроксимация исходного уравнения

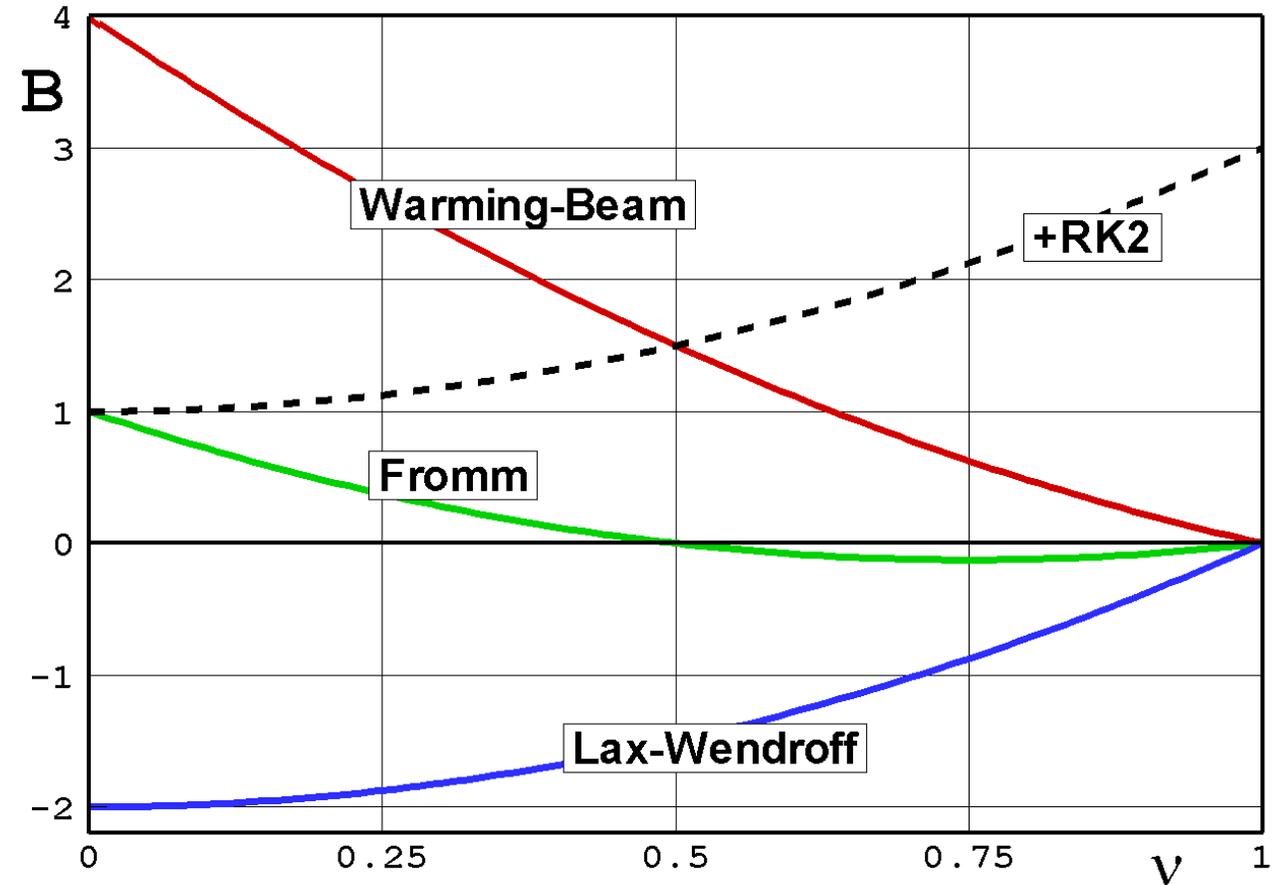
Разложение в ряд Тейлора

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{a\Delta x^2}{12} B(\nu) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + O(\Delta x^3)$$

Схема Лакса-Вендроффа:  $B(\nu) = -2(1 - \nu^2)$

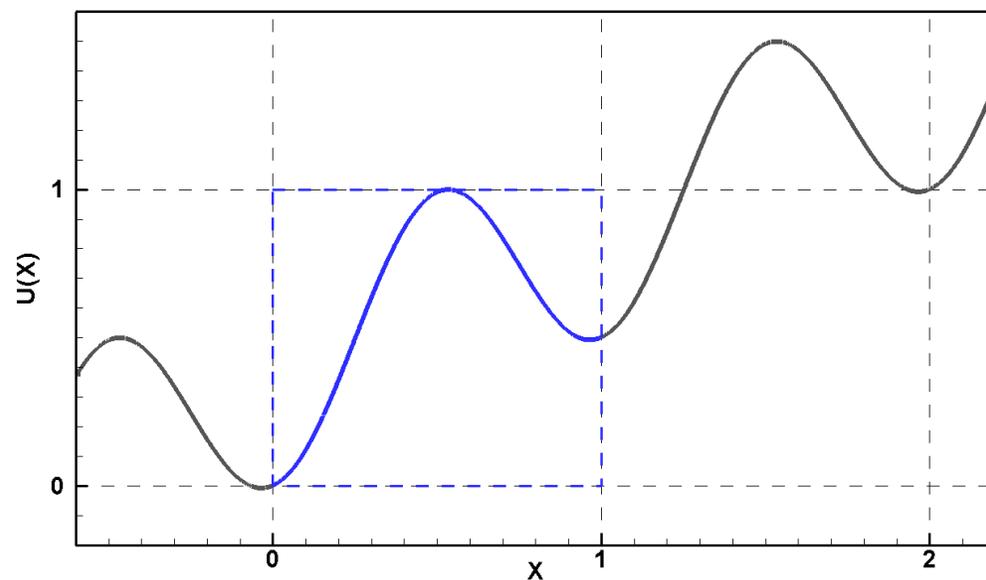
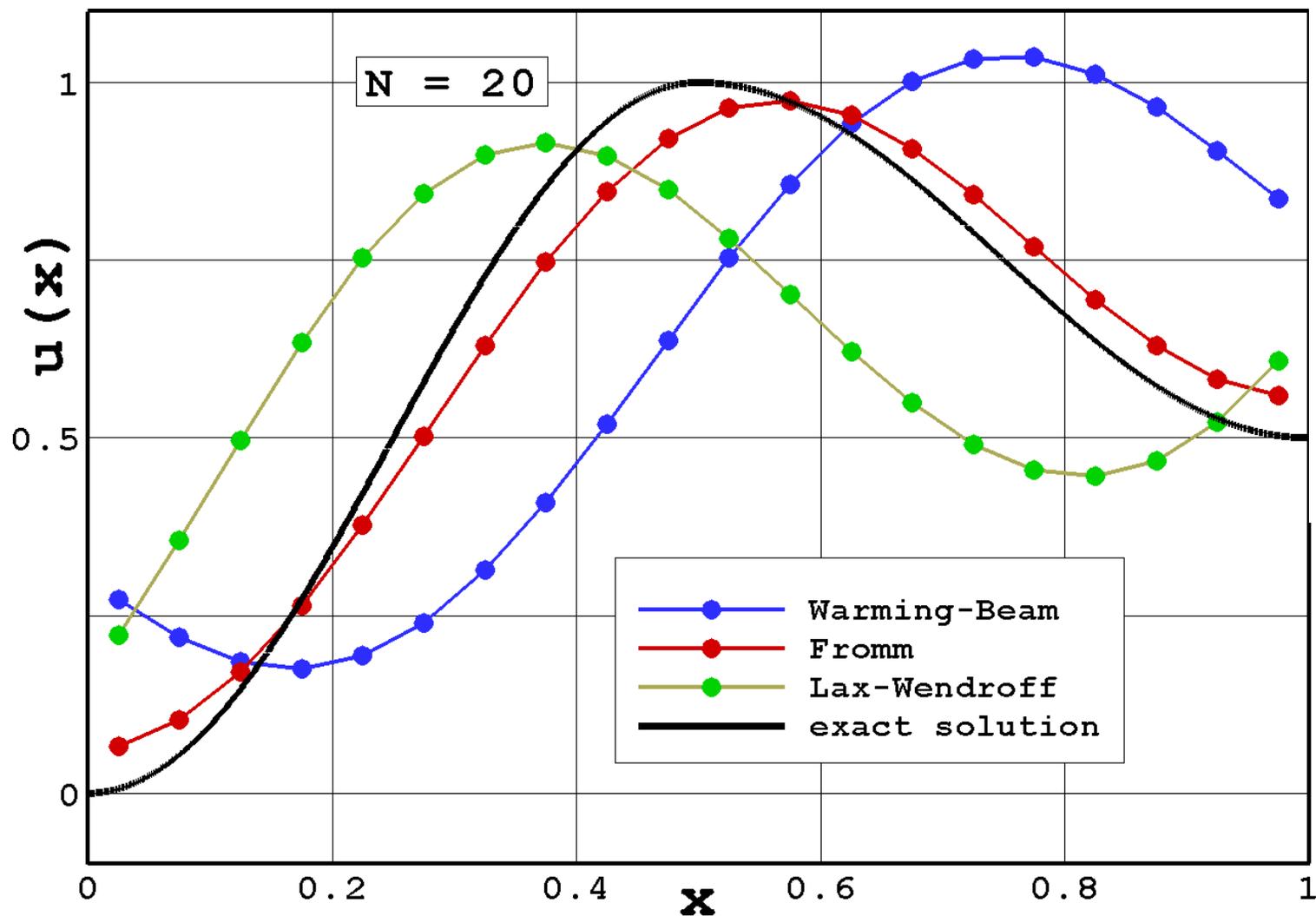
Схема Фромма:  $B(\nu) = (1 - \nu)(1 - 2\nu)$

Схема Уорминга-Бима:  $B(\nu) = 2(1 - \nu)(2 - \nu)$



# Схемы Лакса-Вендроффа, Фромма и Уорминга-Бима

Численное решение линейного уравнения переноса:  
ступенчато-периодическая функция  $u(x)$  с гладким профилем



$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Параметры тестовой задачи:

$$a = 1, t = 10$$

$$C_{CFL} = 0.25$$

# Реконструкция-ограничитель MC

- **van Leer B.** Towards the ultimate conservative difference scheme: IV. A new approach to numerical convection // J. Comp. Phys., **1977**

MC = monotonized central-difference limiter

из книги: *LeVeque R.J. Finite volume methods for hyperbolic problems, Cambridge University Press, 2002*

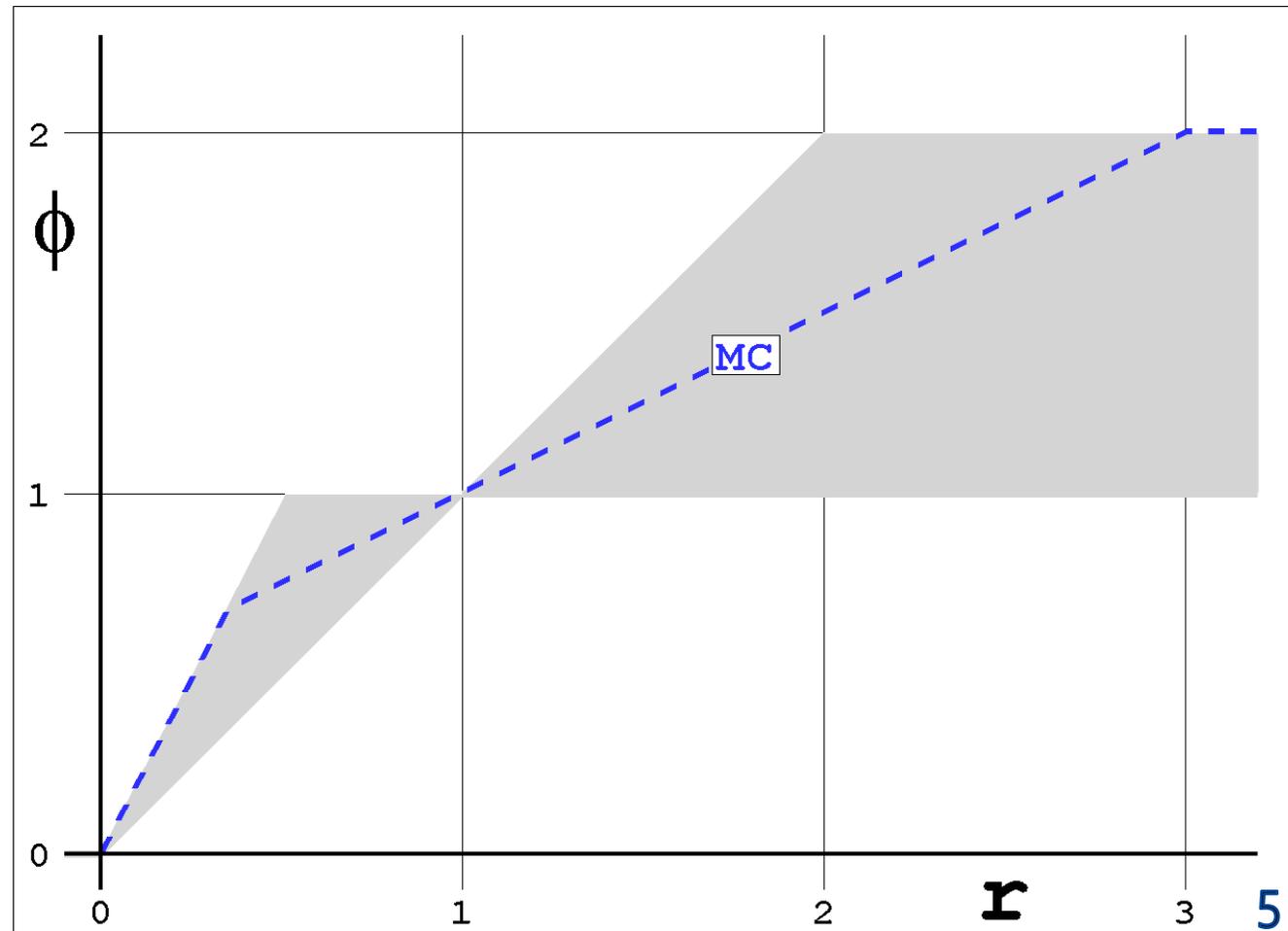
$$\phi^{\text{MC}}(r) = \begin{cases} \min[(1+r)/2, 2, 2r], & \text{if } r > 0, \\ 0, & \text{if } r < 0. \end{cases}$$

Условие симметрии:

$$\begin{aligned} \Delta u_i^n &= f(u_i^n - u_{i-1}^n, u_{i+1}^n - u_i^n) \\ &= f(u_{i+1}^n - u_i^n, u_i^n - u_{i-1}^n), \end{aligned}$$

или применительно к функции  $\phi$ :

$$\phi(1/r) = \phi(r) / r$$

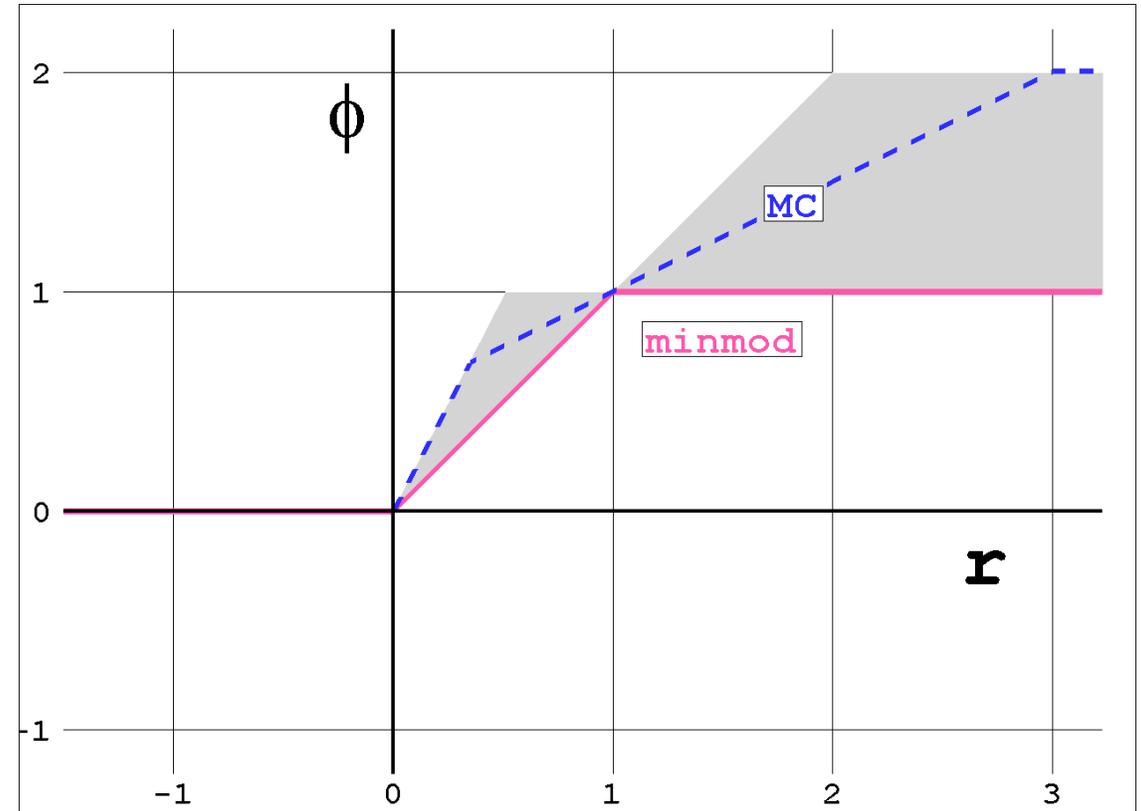
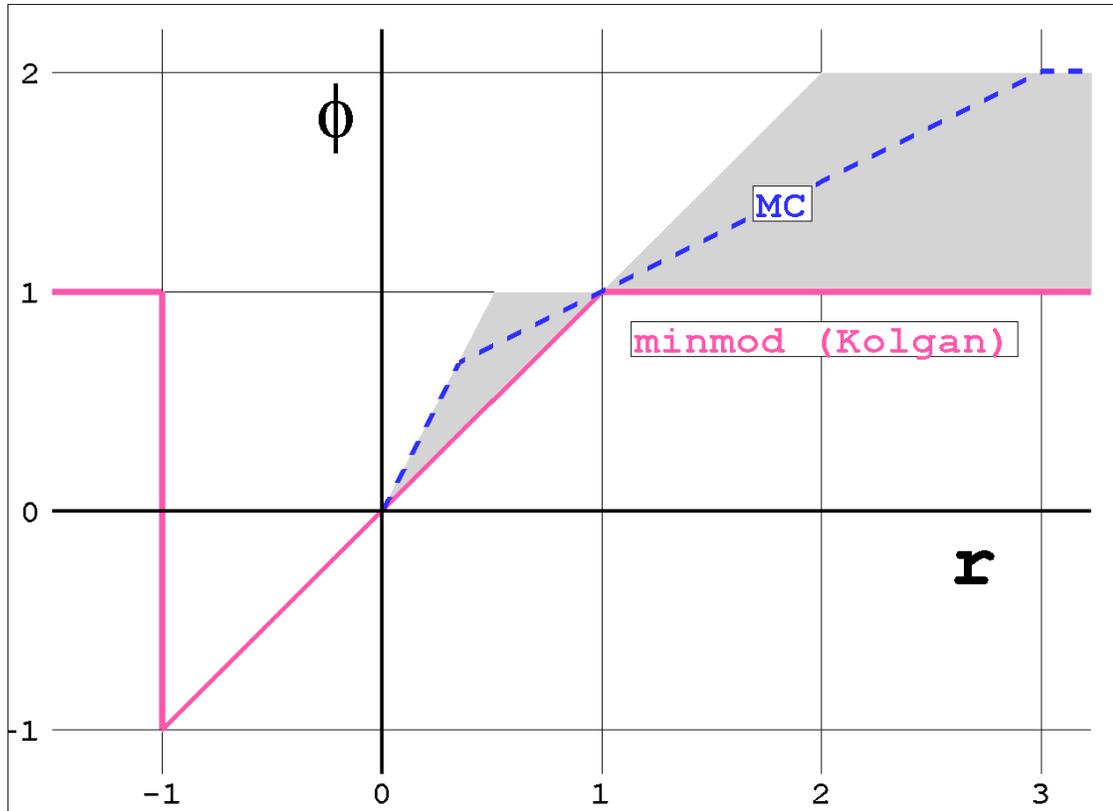


# Реконструкция-ограничитель minmod

- ❑ **Колган В.П.** Применение принципа минимальных значений производных ... // Ученые записки ЦАГИ, **1972**
- ❑ **Osher S., Chakravarthy S.** High Resolution Schemes and the Entropy Condition // SIAM J. Numer. Anal., **1984**

$$\phi^{\text{minmod(Kolgan)}}(r) = \begin{cases} r, & \text{if } |r| > 1, \\ 1, & \text{if } |r| < 1. \end{cases}$$

$$\phi^{\text{minmod}}(r) = \begin{cases} \min[1, r], & \text{if } r > 0, \\ 0, & \text{if } r < 0. \end{cases}$$



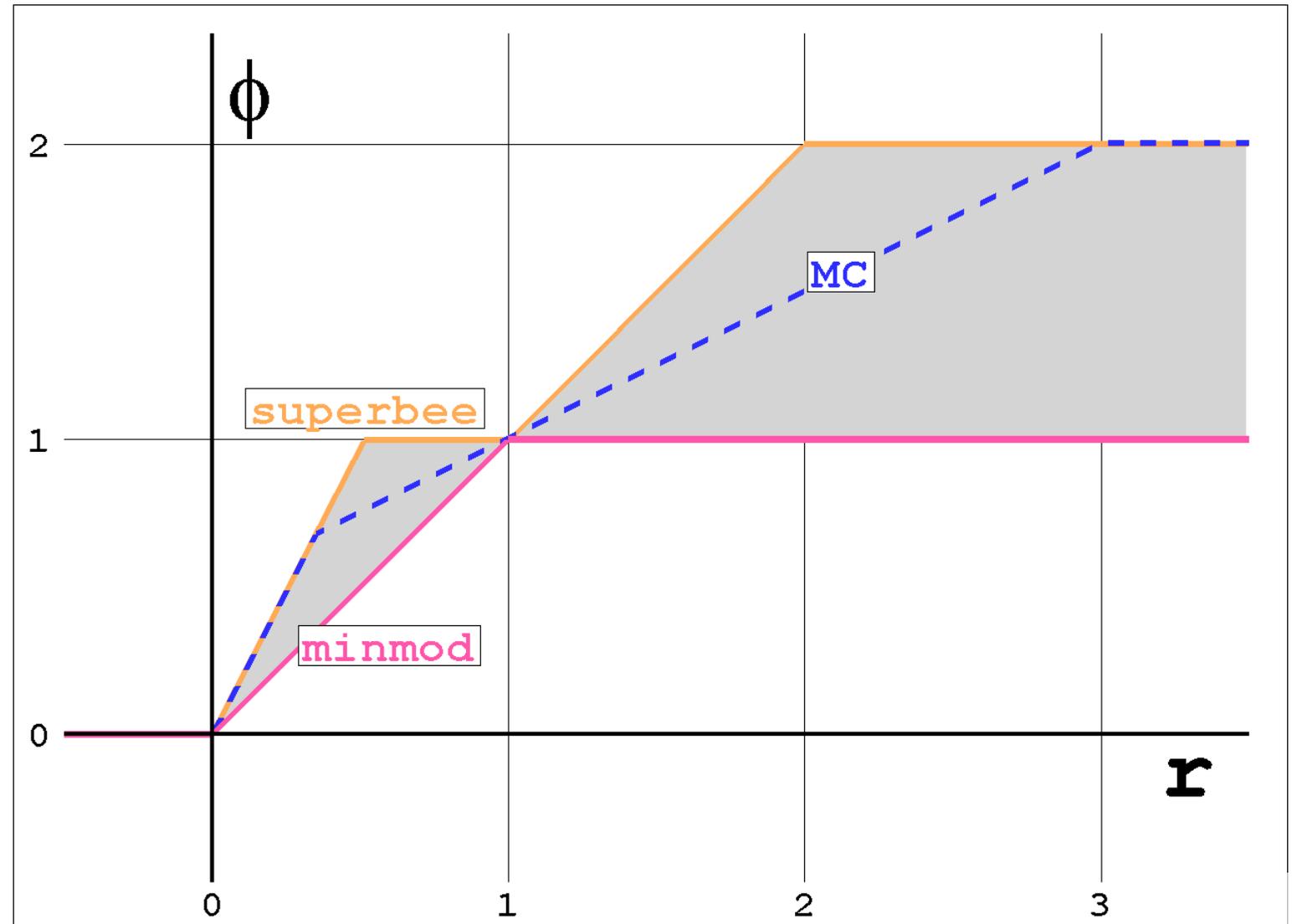
# Реконструкция-ограничитель superbee

□ Roe P.L. Some contributions to the modeling of discontinuous flows // Lect. Notes Appl. Math., 1985

$$\phi^{\text{superbee}}(r) = \begin{cases} \min[\max(1, r), 2, 2r], & \text{if } r > 0, \\ 0, & \text{if } r < 0. \end{cases}$$

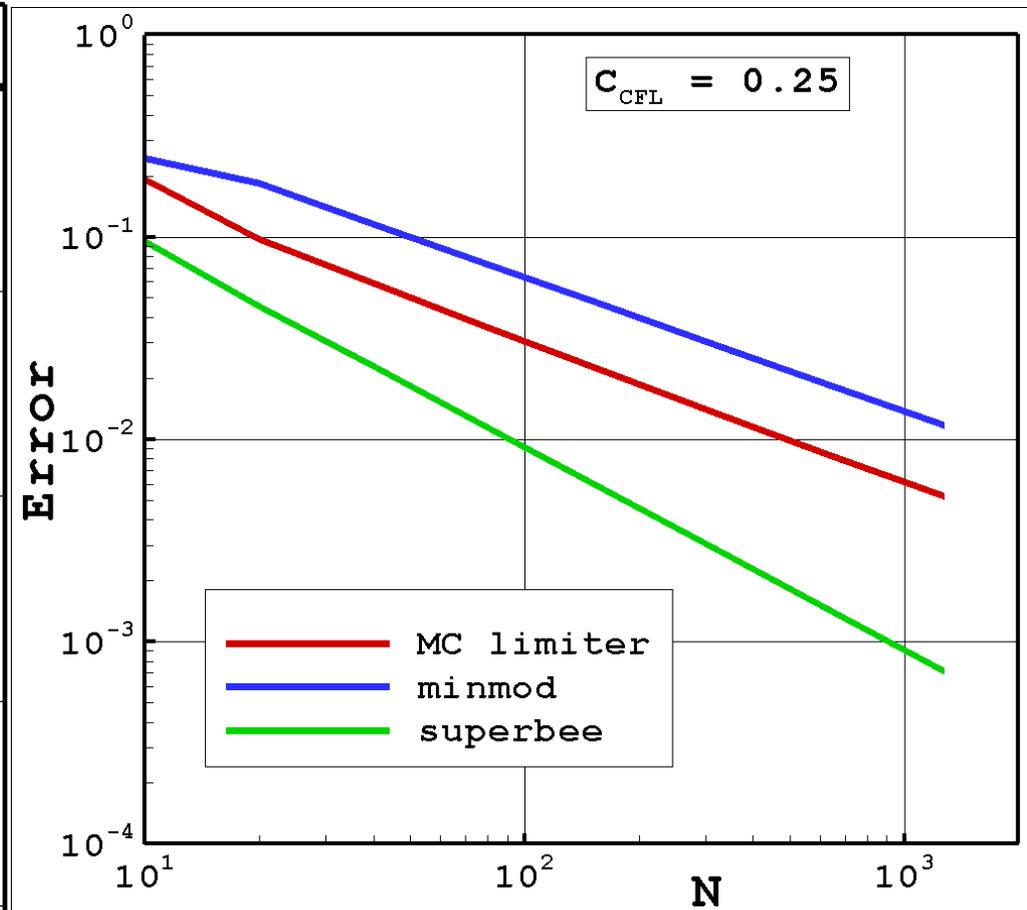
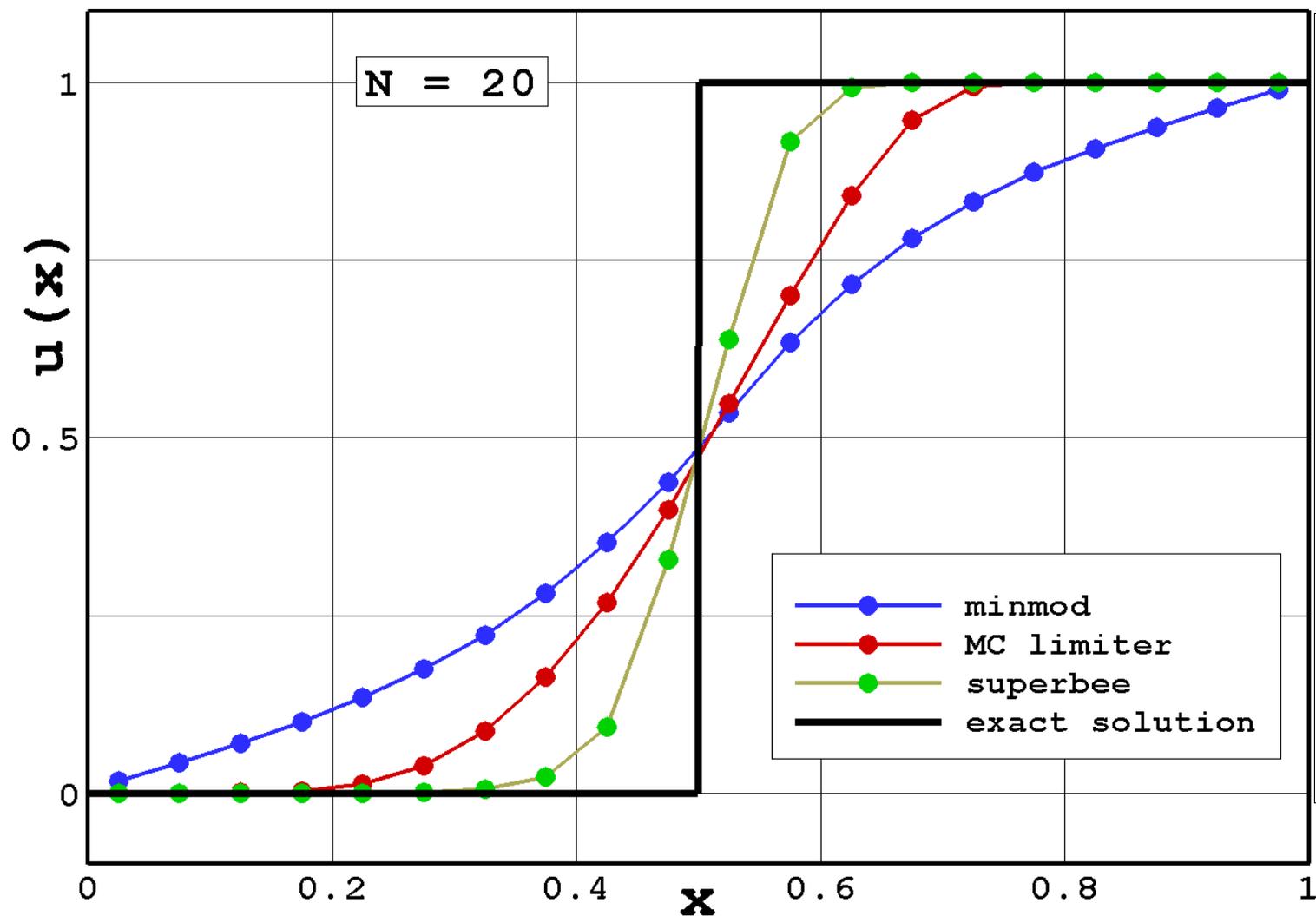
$$\phi^{\text{MC}}(r) = \begin{cases} \min[(1+r)/2, 2, 2r], & \text{if } r > 0, \\ 0, & \text{if } r < 0. \end{cases}$$

$$\phi^{\text{minmod}}(r) = \begin{cases} \min[1, r], & \text{if } r > 0, \\ 0, & \text{if } r < 0. \end{cases}$$



# Реконструкции-ограничители MC, minmod и superbee

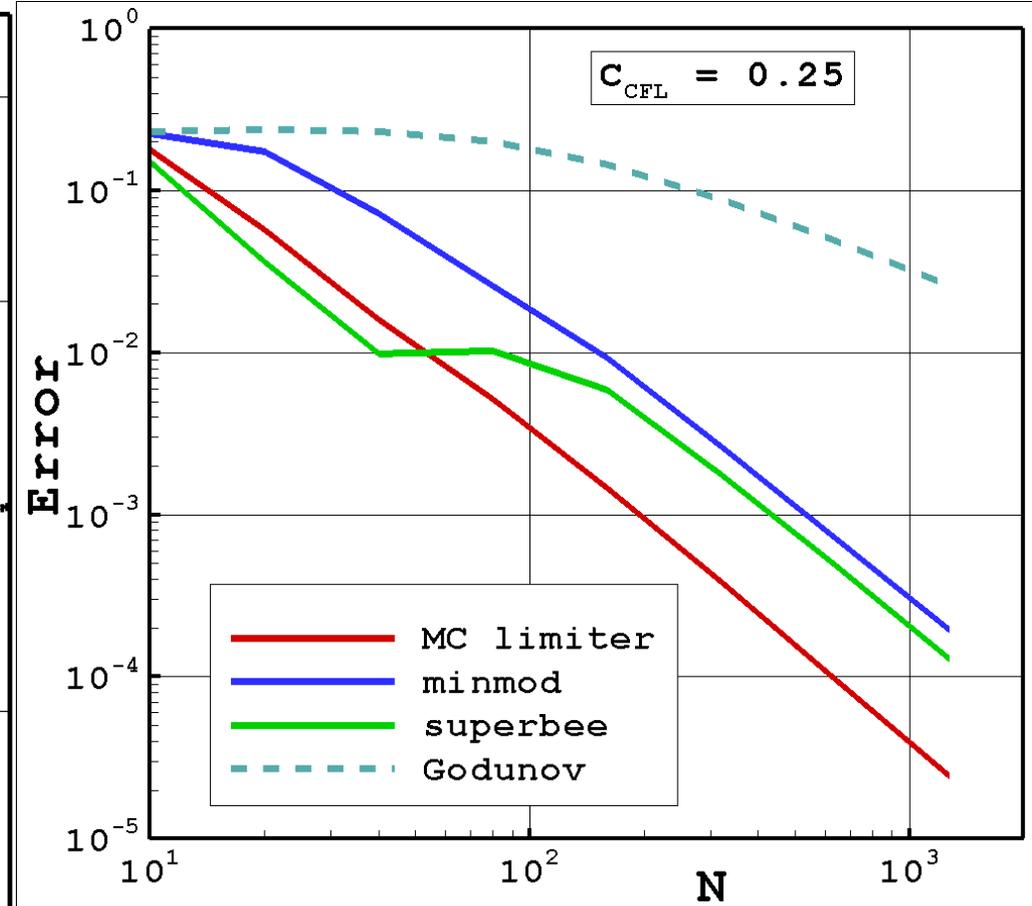
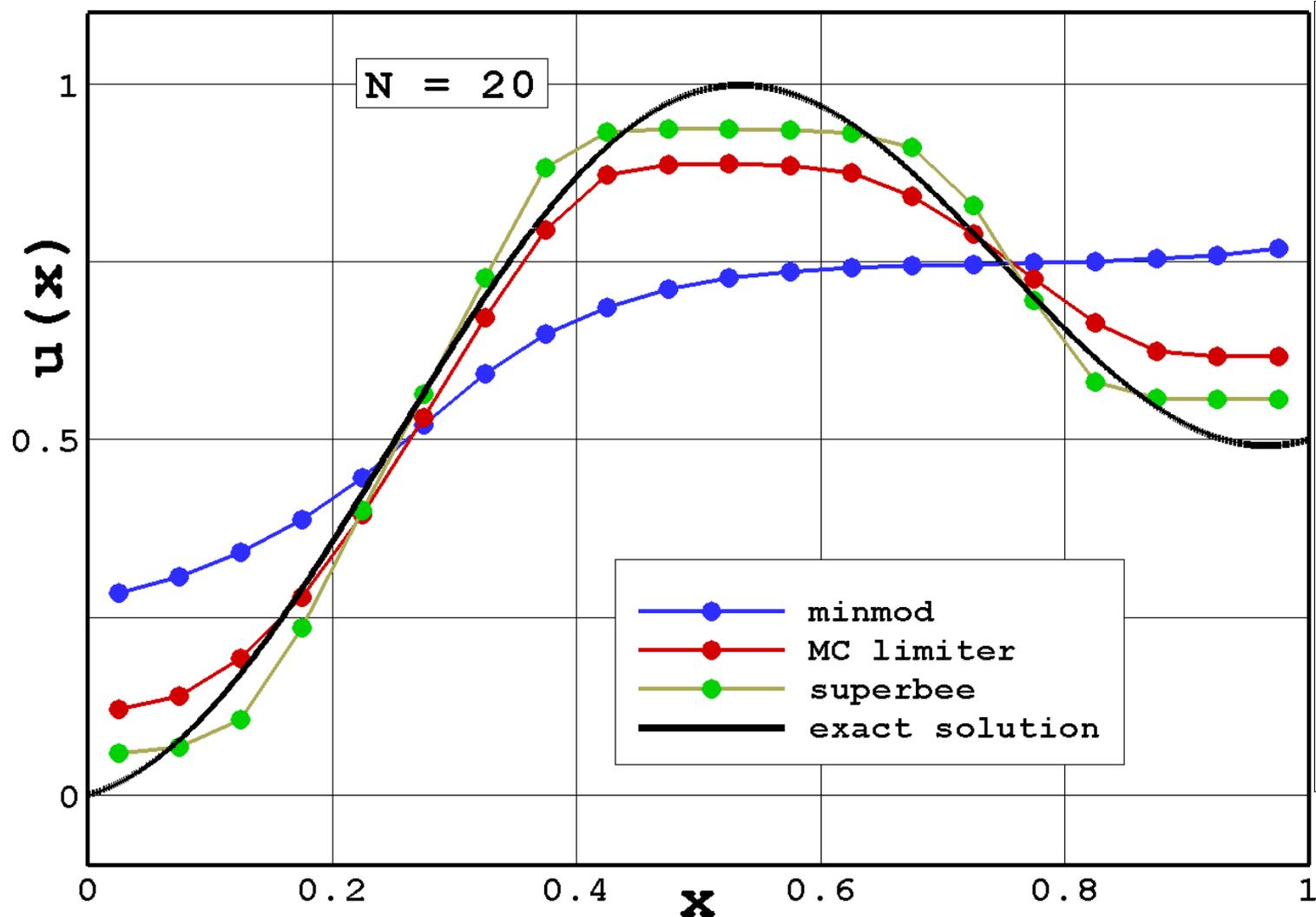
Численное решение линейного уравнения переноса:  
ступенчатая функция  $u(x)$  с разрывом профиля



Параметры тестовой задачи:  
 $a = 1, t = 10, C_{CFL} = 0.25$

# Реконструкции-ограничители MC, minmod и superbee

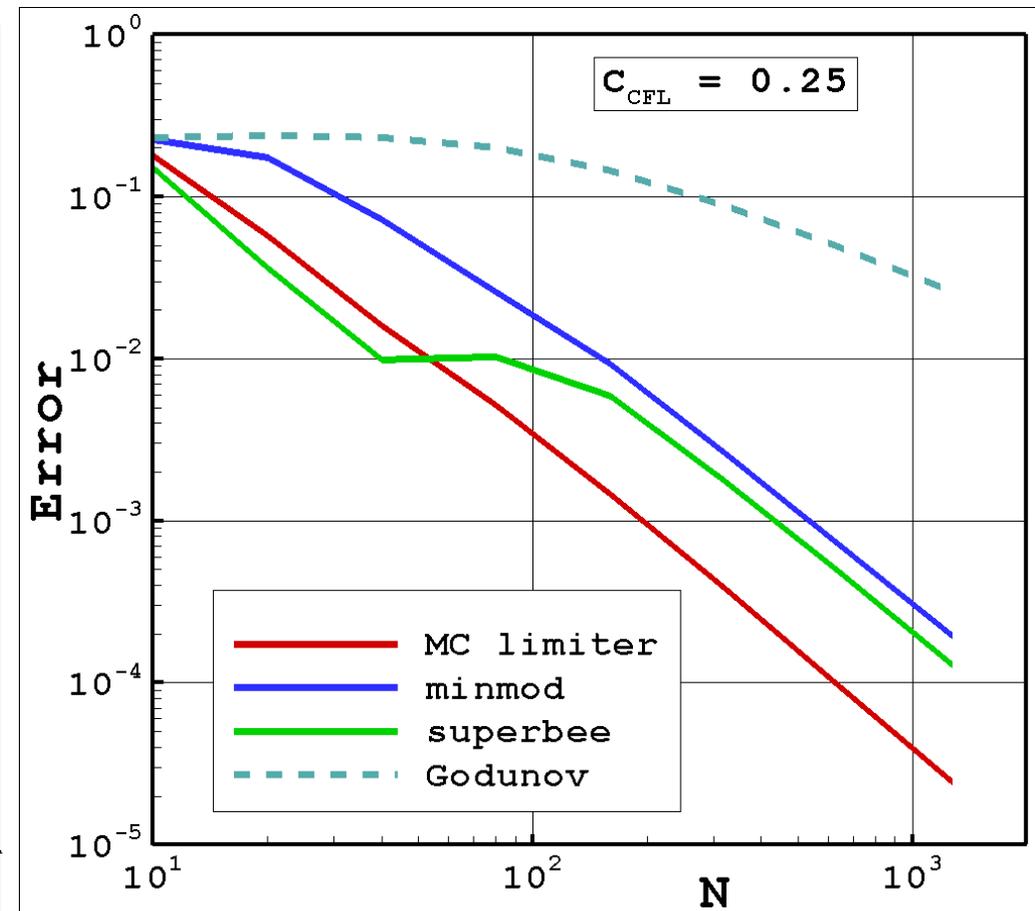
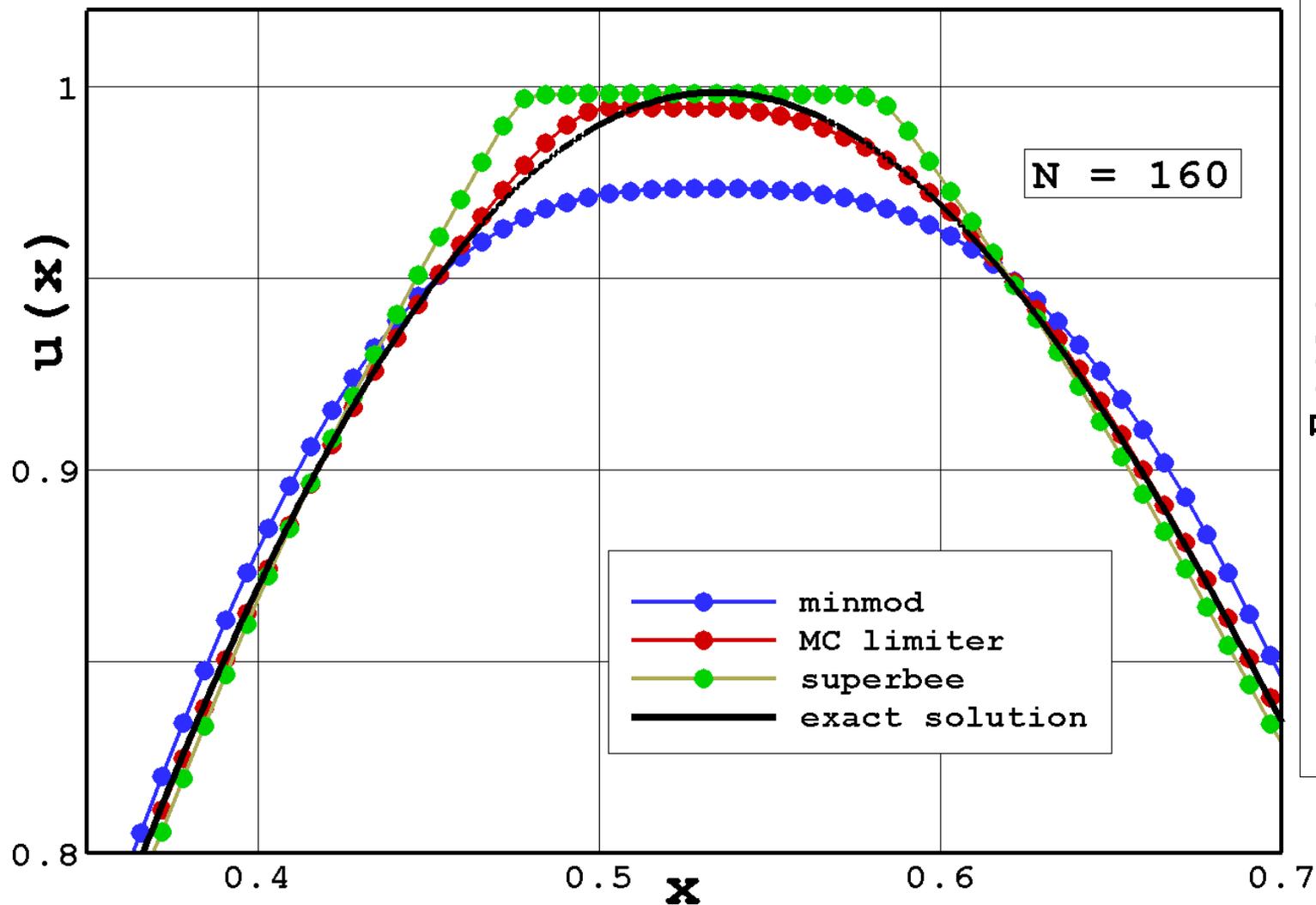
Численное решение линейного уравнения переноса:  
ступенчато-периодическая функция  $u(x)$  с гладким профилем



Параметры тестовой задачи:  
 $a = 1, t = 10, C_{CFL} = 0.25$

# Реконструкции-ограничители MC, minmod и superbee

Численное решение линейного уравнения переноса:  
ступенчато-периодическая функция  $u(x)$  с гладким профилем



Параметры тестовой задачи:

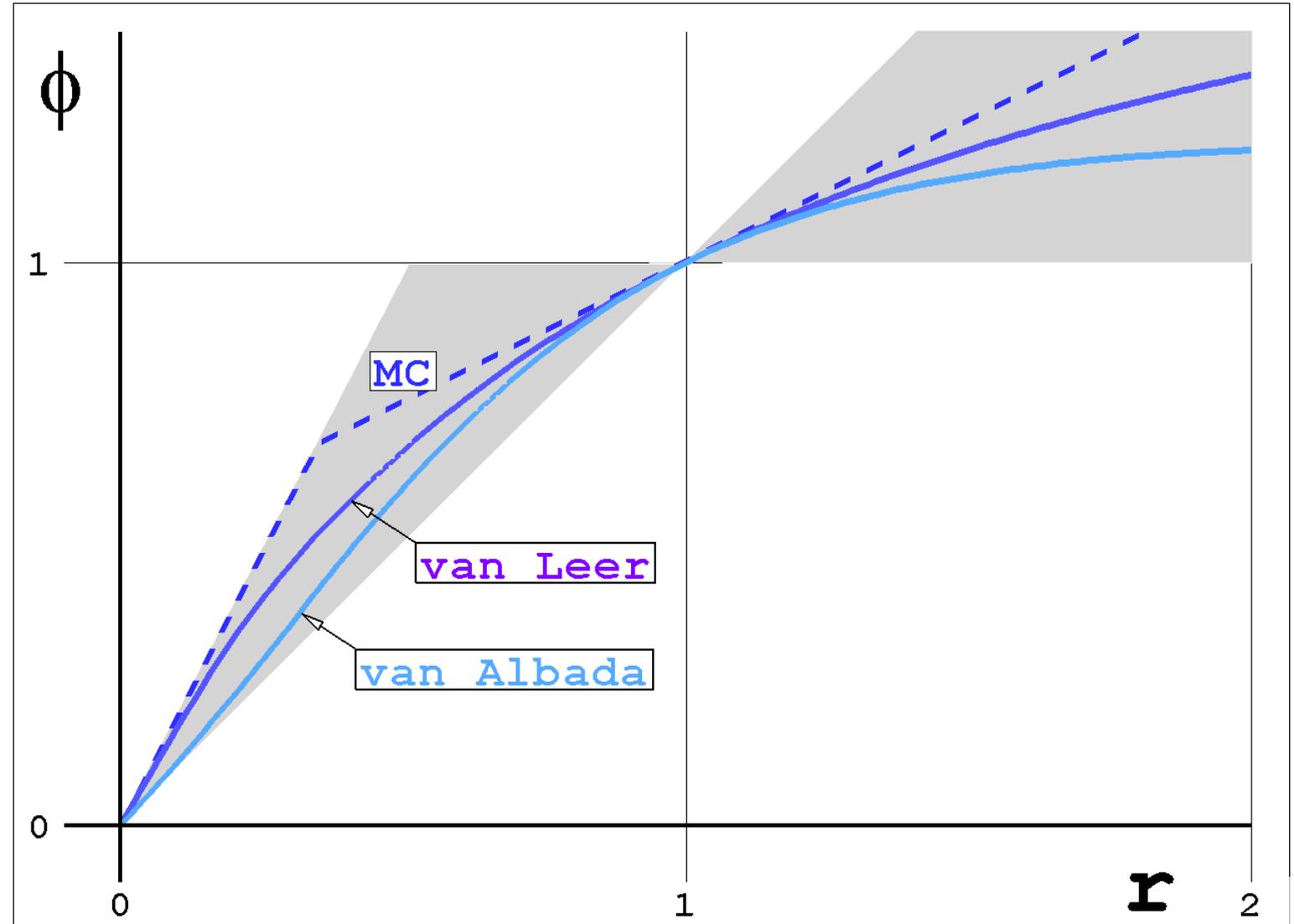
$a = 1, t = 10, C_{CFL} = 0.25$

# Реконструкции-ограничители ван Лира и ван Альбады

- ❑ **van Leer B.** Towards the ultimate conservative difference scheme: IV. A new approach ... // J. Comp. Phys., **1977**
- ❑ **van Albada G.D., van Leer B., Roberts W.W.** A comparative study of numerical methods ... // Astron. Astrophysics, **1982**

$$\phi^{\text{van Leer}}(r) = \begin{cases} \frac{2r}{1+r}, & \text{if } r > 0, \\ 0, & \text{if } r < 0. \end{cases}$$

$$\phi^{\text{van Albada}}(r) = \begin{cases} \frac{r+r^2}{1+r^2}, & \text{if } r > 0, \\ 0, & \text{if } r < 0. \end{cases}$$



# Параметрические реконструкции-ограничители

Параметрические реконструкции-ограничители на базе ограничителей

(параметр  $1 < k < 2$ )

superbee



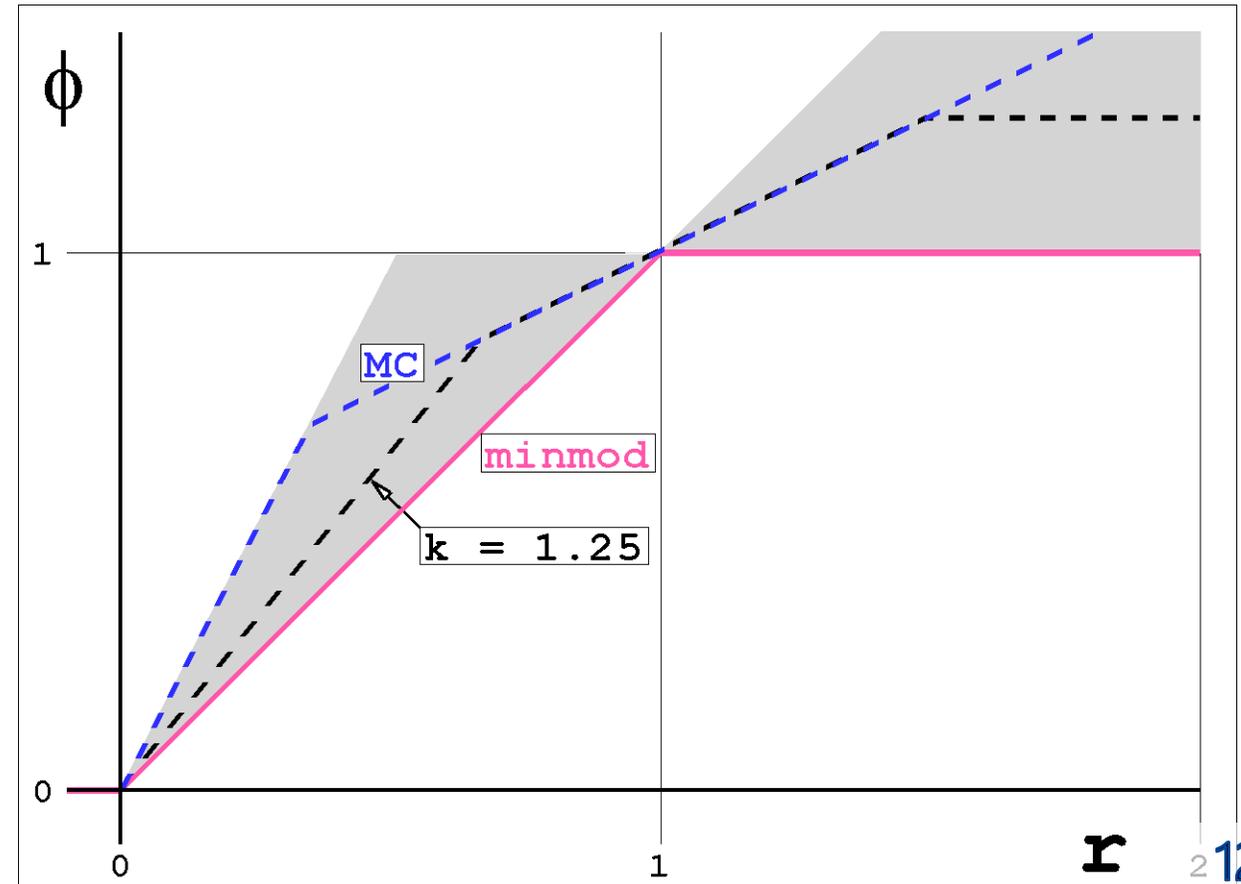
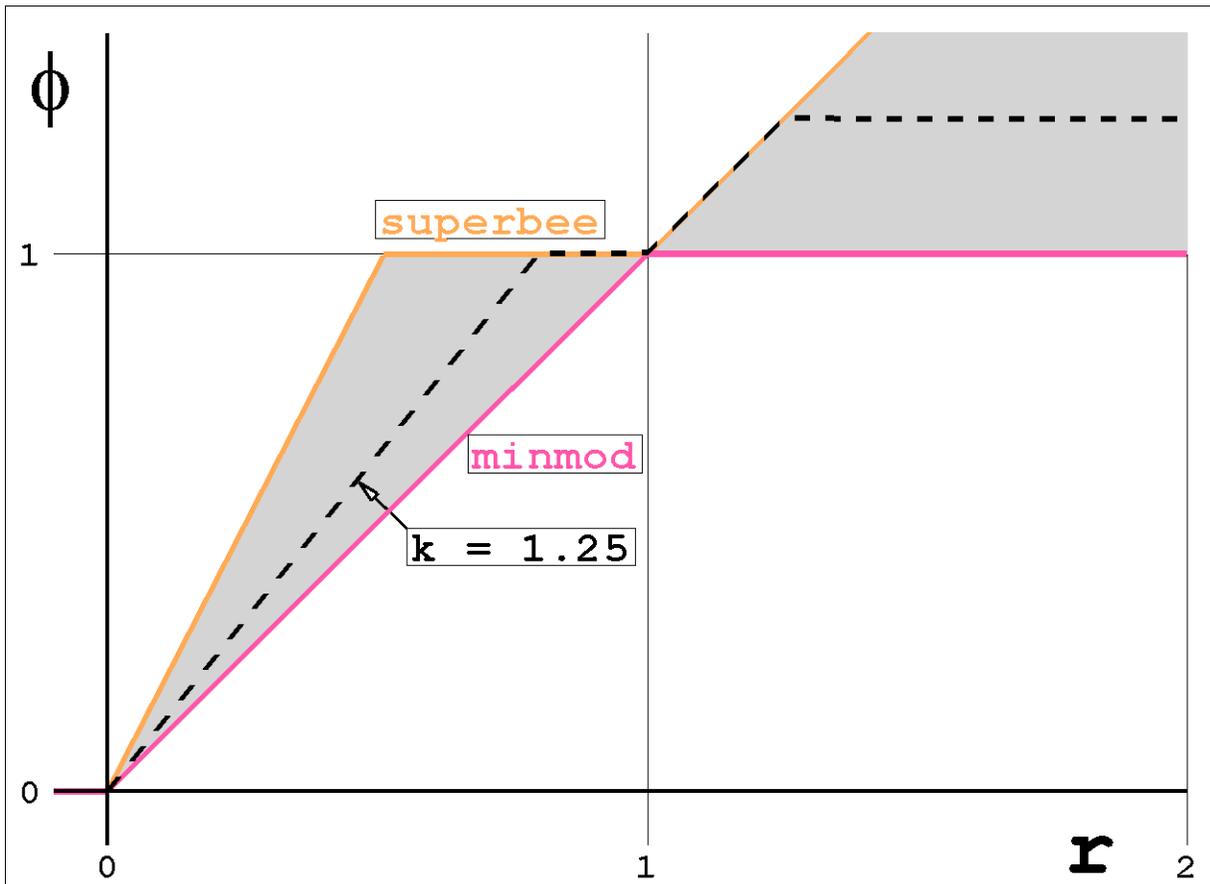
и

MC



$$\phi(r) = \begin{cases} \min[\max(1, r), k, kr], & \text{if } r > 0, \\ 0, & \text{if } r < 0. \end{cases}$$

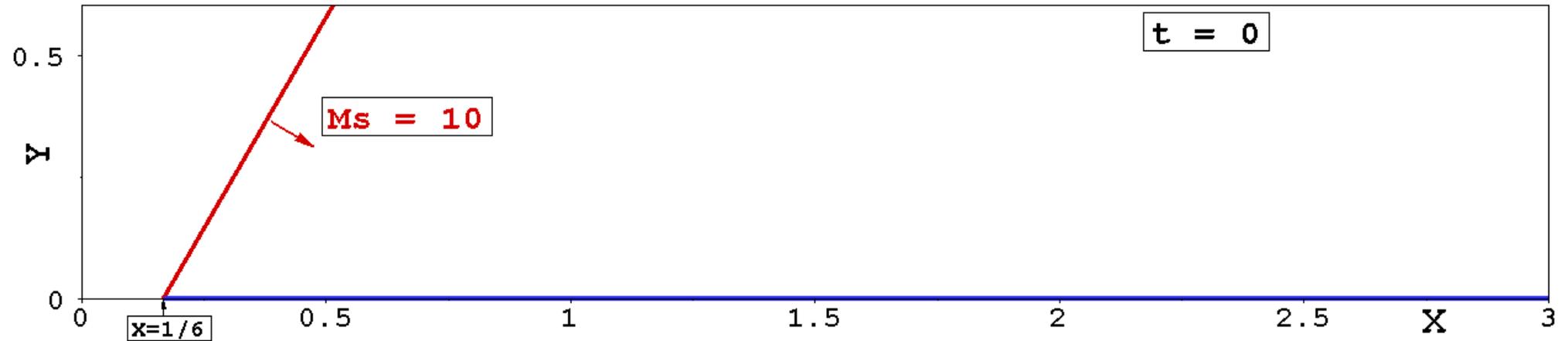
$$\phi(r) = \begin{cases} \min[(1+r)/2, k, kr], & \text{if } r > 0, \\ 0, & \text{if } r < 0. \end{cases}$$



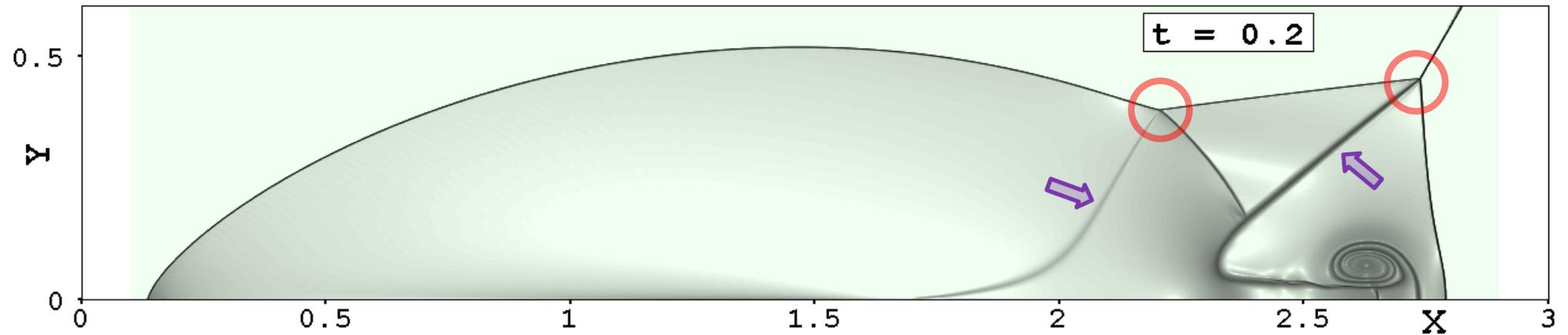
# Тестовая задача о двойном маховском отражении

□ **Woodward P.R., Colella P.** The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks // Journal of Computational Physics, **1984**

Постановка задачи



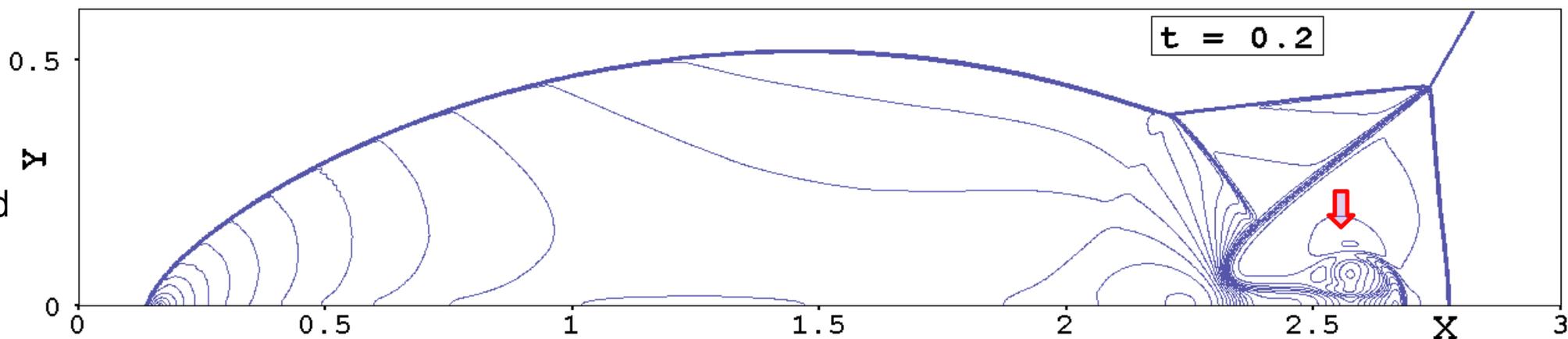
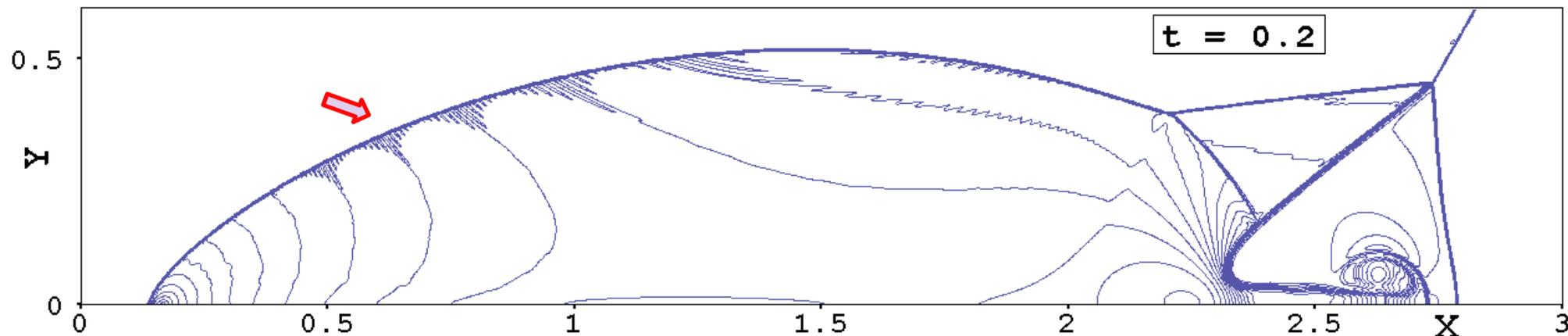
Структура течения на момент  $t = 0.2$



## Тестовая задача о двойном маховском отражении

Результаты расчета задачи методом HR с решателем задачи Римана HLL и двумя реконструкциями-ограничителями на сетке с  $\Delta x = \Delta y = 1/480$

Изолинии плотности



## Реконструкция по характеристическим переменным

В линейном приближении одномерные уравнения газовой динамики сводятся к соотношениям вдоль характеристических линий:

$$d\rho - \frac{1}{a^2} dp = 0 \quad \text{вдоль линий} \quad \frac{dx}{dt} = u$$

$$\begin{aligned} du - \frac{1}{\rho a} dp &= 0 \quad \text{вдоль линий} \quad \frac{dx}{dt} = u - a \\ du + \frac{1}{\rho a} dp &= 0 \quad \text{вдоль линий} \quad \frac{dx}{dt} = u + a \end{aligned}$$

Вектор примитивных переменных:  $\mathbf{Q} = [u_x, u_y, \rho, p]^T$

Приращения примитивных переменных:  $\Delta \mathbf{Q}_{i-1/2,j} = \mathbf{Q}_{i,j} - \mathbf{Q}_{i-1,j}$ ,  $\Delta \mathbf{Q}_{i+1/2,j} = \mathbf{Q}_{i+1,j} - \mathbf{Q}_{i,j}$

Переход к характеристическим переменным:  $\Delta \mathbf{Z}_{i-1/2,j} = \left( \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \mathbf{Q}} \right)_{i,j} \Delta \mathbf{Q}_{i-1/2,j}$ ,  $\Delta \mathbf{Z}_{i+1/2,j} = \left( \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \mathbf{Q}} \right)_{i,j} \Delta \mathbf{Q}_{i+1/2,j}$

Применение реконструкции-ограничителя:  $\Delta \mathbf{Z}_{i,j} = f(\Delta \mathbf{Z}_{i-1/2,j}, \Delta \mathbf{Z}_{i+1/2,j})$

Возврат к примитивным переменным:  $\Delta \mathbf{Q}_{i,j} = \left( \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{Z}} \right)_{i,j} \Delta \mathbf{Z}_{i,j}$

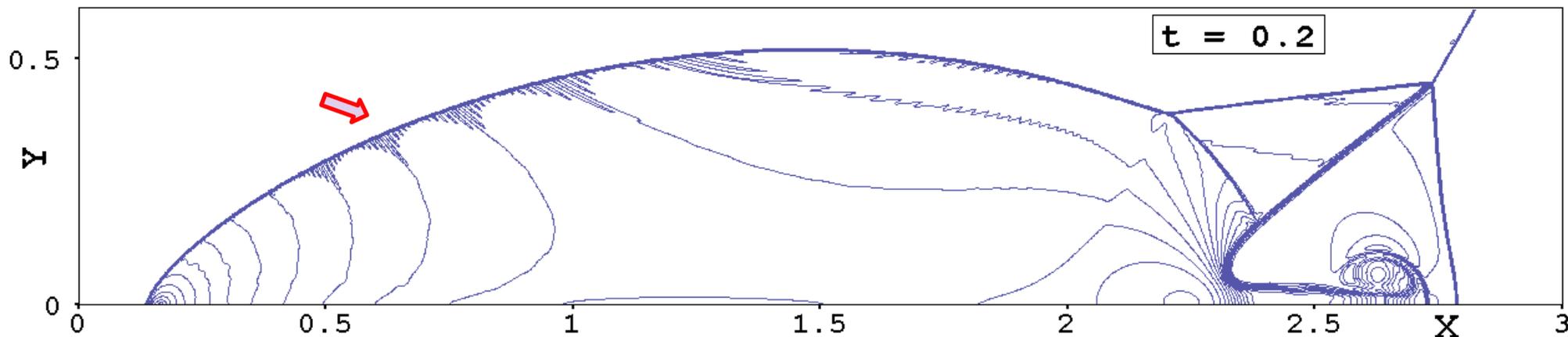
Матрицы перехода:

$$\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/\rho a \\ 1 & 0 & 0 & -1/\rho a \\ 0 & 0 & 1 & -1/a^2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ \rho/2a & -\rho/2a & 1 & 0 \\ \rho a/2 & -\rho a/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

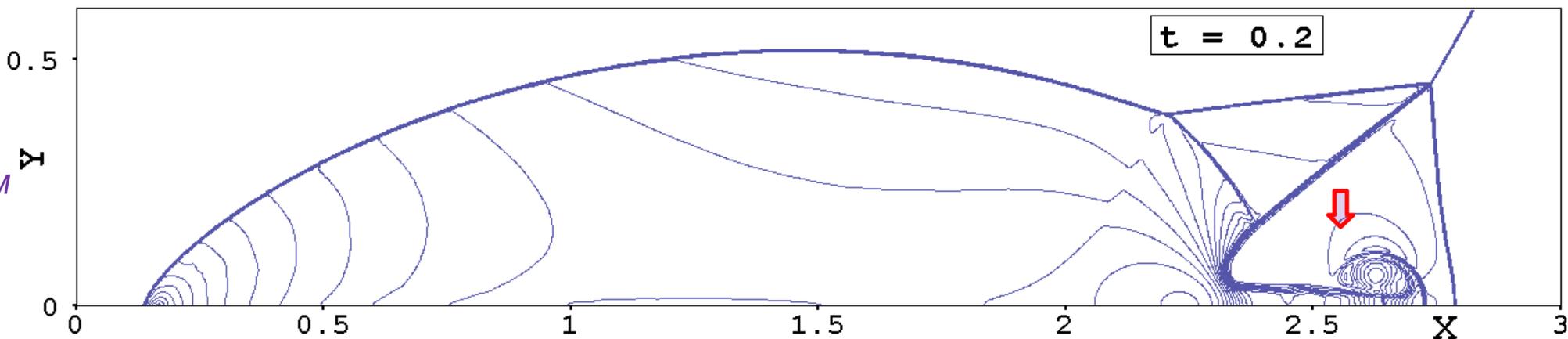
# Тестовая задача о двойном маховом отражении

Результаты расчета задачи методом HR с решателем задачи Римана HLL и реконструкцией-ограничителем MC на сетке с  $\Delta x = \Delta y = 1/480$

Изолинии плотности



реконструкция по  
примитивным  
переменным



реконструкция по  
характеристическим  
переменным

## Реконструкция по характеристическим переменным

- ❑ **Toro E.F.** Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics, 3-rd edition. Springer-Verlag, Berlin, **2009**
- ❑ **LeVeque R.J.** Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems. Cambridge University Press, **2002**
- ❑ **Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семенов А. Ю.** Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. Физматлит, Москва, **2001**
- ❑ **van Leer B.** Upwind and High-Resolution Methods for Compressible Flow: From Donor Cell to Residual-Distribution Schemes (*Review Article*) // Commun. Comput. Phys., **2006**

Reconstruct linear subcell distributions of a complete set of state variables; these may be the conserved variables  $\rho, \rho u, \rho E$ . In practice, though, it is not such a good idea to use  $\rho E$ , which must remain greater than  $\rho u^2/2$ ; independent interpolation of  $\rho, \rho u$  and  $\rho E$  does not guarantee this. Better use  $\rho, \rho u, p$ , or even primitive variables  $\rho, u, p$ ; call the latter set  $\mathbf{W}$ .

*Variation 2:* instead of the primitive variables you may use the characteristic variables  $V_k$  in the predictor step, which actually are the most appropriate choice when gradient limiting is expected. They also give the “cleanest” results. Consult me.

# Условие сохранения монотонности решения

□ **Годунов С.К.** Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Мат. сборник, **1959**

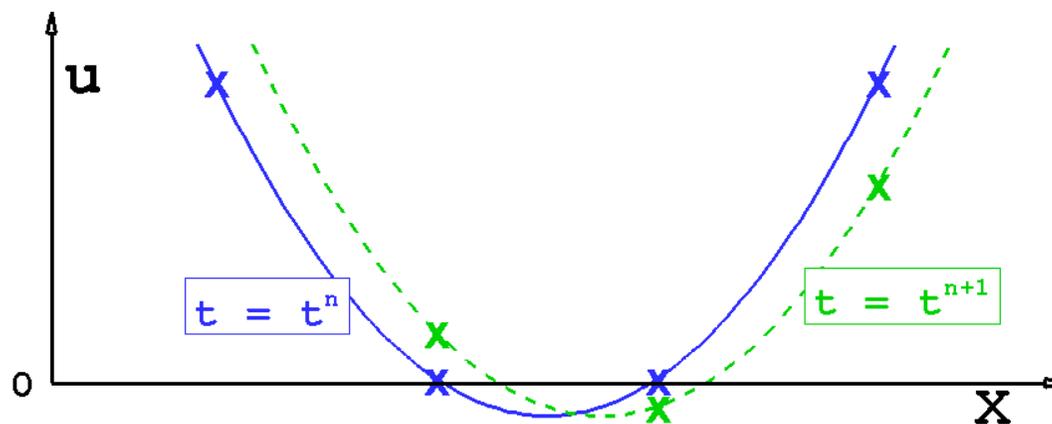
## Схемы, сохраняющие монотонность решения в классе линейных схем:

схемы первого порядка аппроксимации



схемы второго порядка аппроксимации и выше

Линейная схема, сохраняющая монотонность решения, не позволяет перевести параболу в параболу



Нелинейная схема, удовлетворяющая TVD-условию, не позволяет перевести параболу в параболу

## Схемы, сохраняющие монотонность решения в классе TVD-схем:

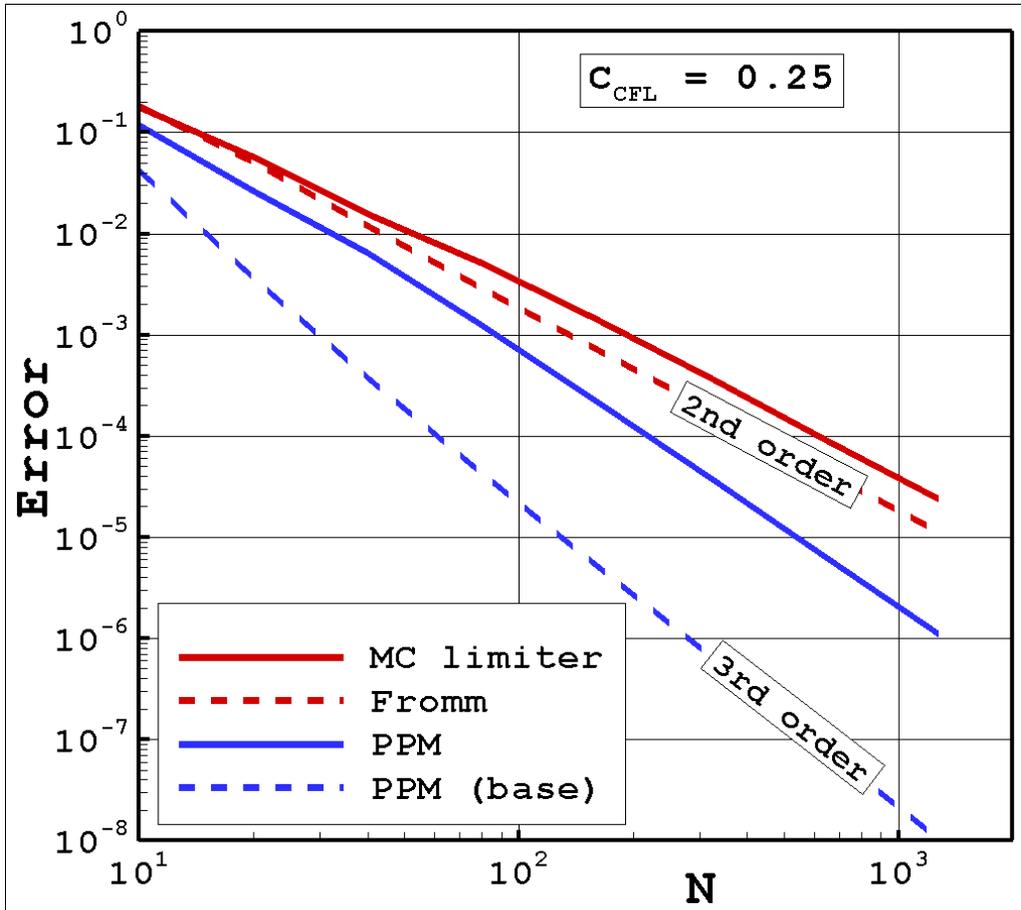
схемы первого порядка аппроксимации

схемы второго порядка аппроксимации и выше (кроме отдельных точек вблизи экстремумов)

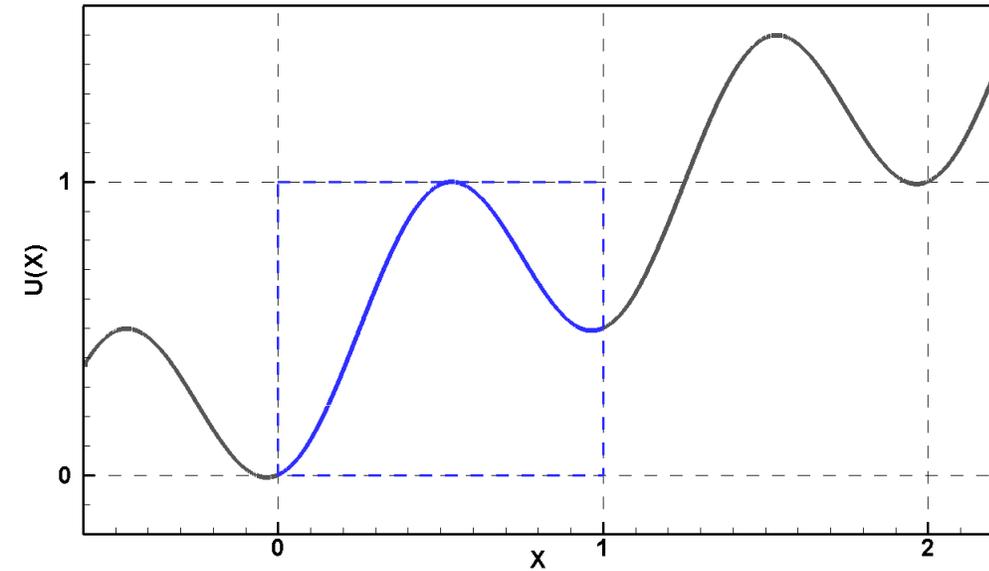


схемы второго порядка аппроксимации и выше

# Влияние TVD-ограничителей на точность решения



Численное решение линейного уравнения переноса:  
ступенчато-периодическая функция  $u(x)$  с гладким профилем



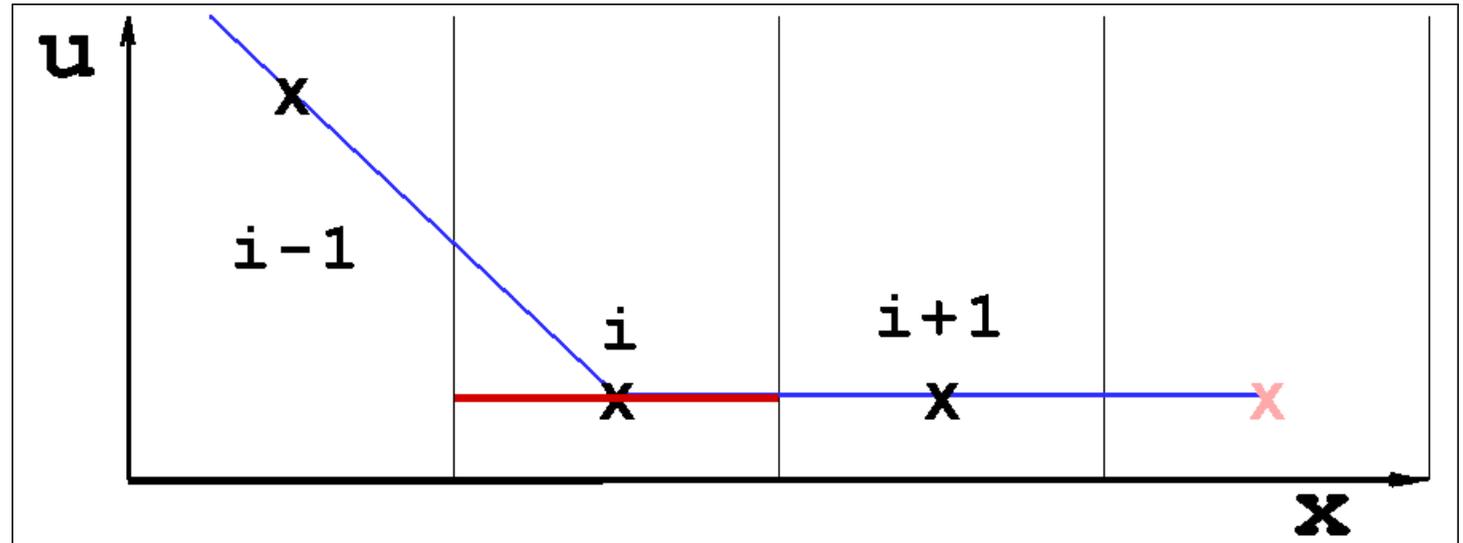
Параметры тестовой задачи:  
 $a = 1, t = 10, C_{CFL} = 0.25$

- ❑ **Woodward P.R., Colella P.** The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks // J. Comp. Phys., v.54, 115-173, **1984**
- ❑ **Colella P., Woodward P.R.** The piecewise parabolic method (PPM) for gas-dynamic simulations // J. Comp. Phys., v.54, 174-201, **1984**

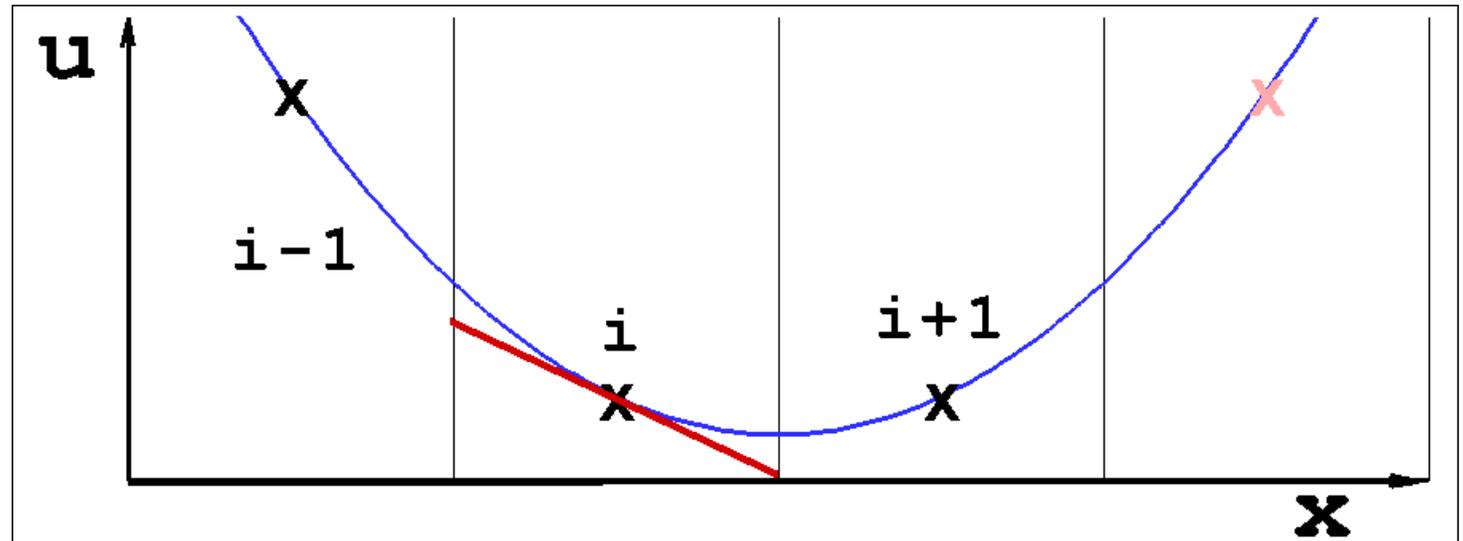
# Врожденный дефект TVD-реконструкций

Необходимость перехода на пятиточечную реконструкцию  
в схемах типа MUSCL (второго порядка точности)

I. Реконструкция в случае  
монотонной функции



II. Реконструкция в случае  
немонотонной гладкой функции



# Схема (реконструкция-ограничитель) UNO2

□ **Harten A., Osher S.** Uniformly high-order accurate nonoscillatory schemes. I // SIAM J. Numer. Anal., **1987**

Формула для расчета приращений функции в  $i$ -ой ячейке:

$$\Delta u_i = \text{minmod}(u_{i+1} - u_i - d_{i+1/2}, u_i - u_{i-1} + d_{i-1/2})$$

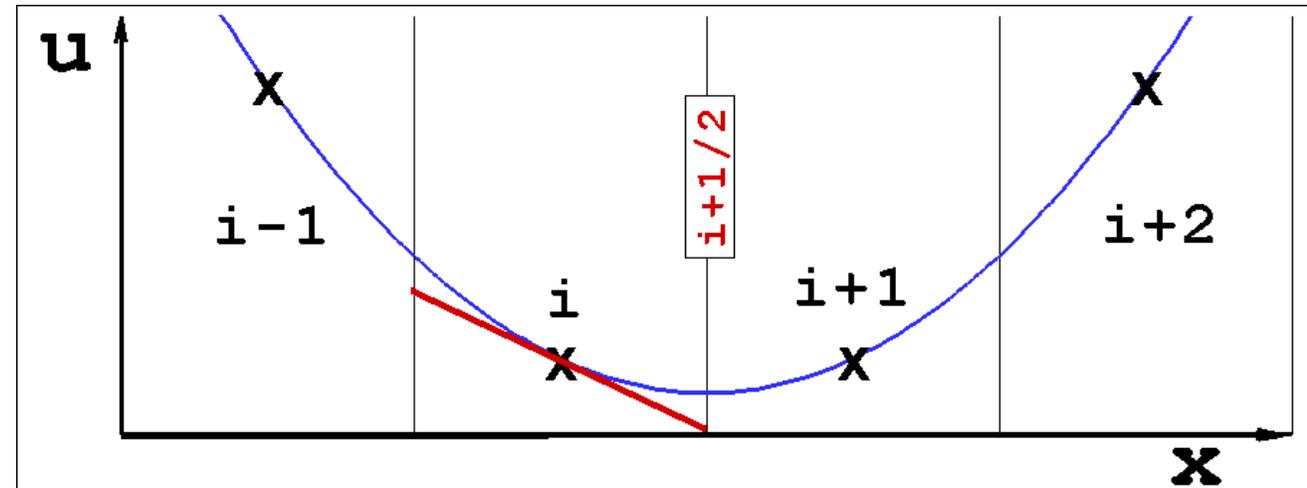
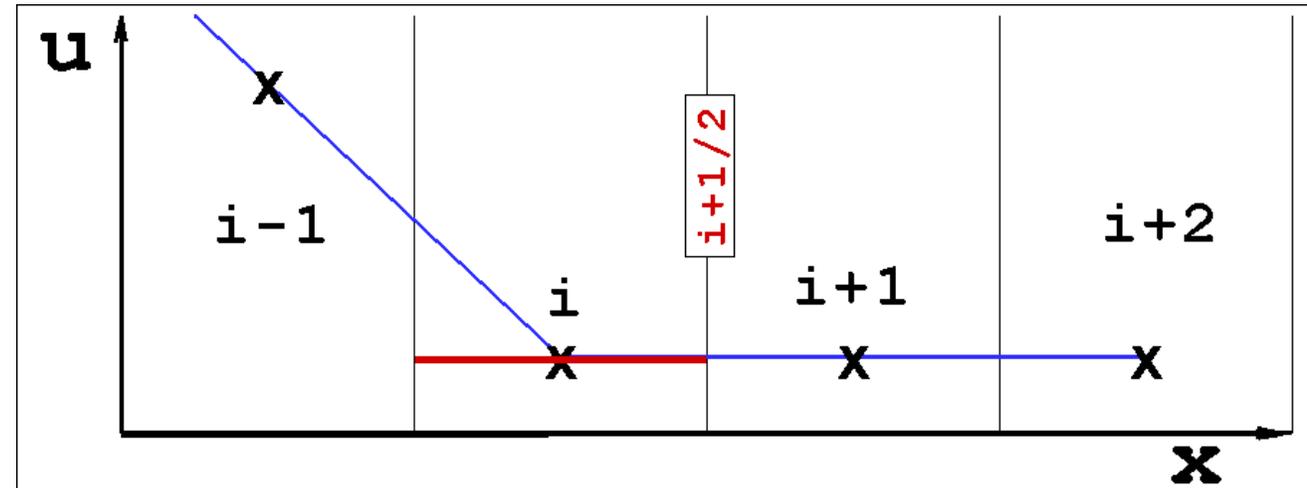
где  $d_{i+1/2}$  – вторые разности (аппроксимируют вторую производную функции с точностью до множителя  $1/\Delta x^2$ ); вычисляются как

$$d_{i+1/2} = \text{minmod}(u_{i+2} - 2u_{i+1} + u_i, u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1})$$

$$d_{i-1/2} = \text{minmod}(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}, u_i - 2u_{i-1} + u_{i-2})$$

\*\*\*

UNO2 = Uniformly 2nd-order accurate Non-Oscillatory



□ **Huynh H.T.** Accurate upwind methods for the Euler equations // SIAM J. Numer. Anal., **1995**

## MP2 = 2nd-order accurate Monotonicity-Preserving

```

FUNCTION DS_MP2( Dm2, Dm1, Dp1, Dp2 )
  P0 = 0.5 * ( Dm1 + Dp1 )
  Pp = 0.5 * ( 3. * Dp1 - Dp2 )
  Pm = 0.5 * ( 3. * Dm1 - Dm2 )
  Qp = Fmedian( Dp1, P0, Pp )
  Qm = Fmedian( Dm1, P0, Pm )
  Qbot = Fmedian( Qm, Qp, - Qm - Qp )
  Qtop = Fmedian( Qbot, 2.*Dm1, 2.*Dp1 )
  Q5 = ( 14. * P0 - Dm2 - Dp2 ) / 12.
  Pmed = Fmedian( P0, Pp, Pm )
  Q6 = Fmedian( Q5, P0, Pmed )
  Q6mod = DMAX1( 5. * DABS(Qp - Qm), DABS(Q6) )
  Q6 = DSIGN( Q6mod, Q6 )
  DS_MP2 = Fmedian( Q6, Qtop, Qbot )
END
    
```

Реконструкция-ограничитель MC:

$$(\Delta u_i)^{MC} = \min\text{mod} \left[ \Delta u_i, 2 \min\text{mod} \left( \Delta u_{i-1/2}, \Delta u_{i+1/2} \right) \right]$$

Реконструкция-ограничитель MC+:

$$(\Delta u_i)^{MC+} = \min\text{mod} \left[ \Delta u_i, 2 \min\text{mod} \left( \Delta u_{i-1/2}^-, \Delta u_{i+1/2}^+ \right) \right]$$

где

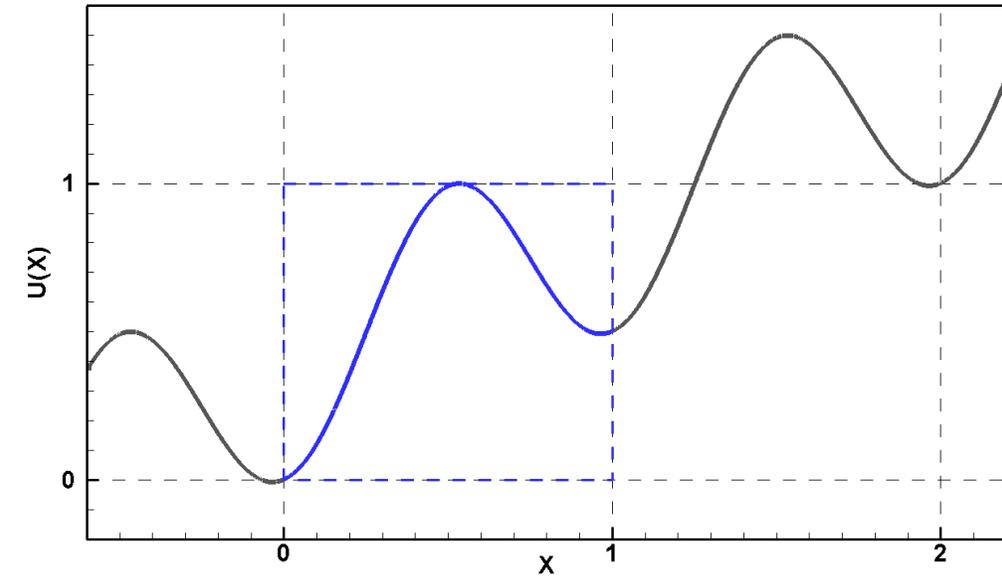
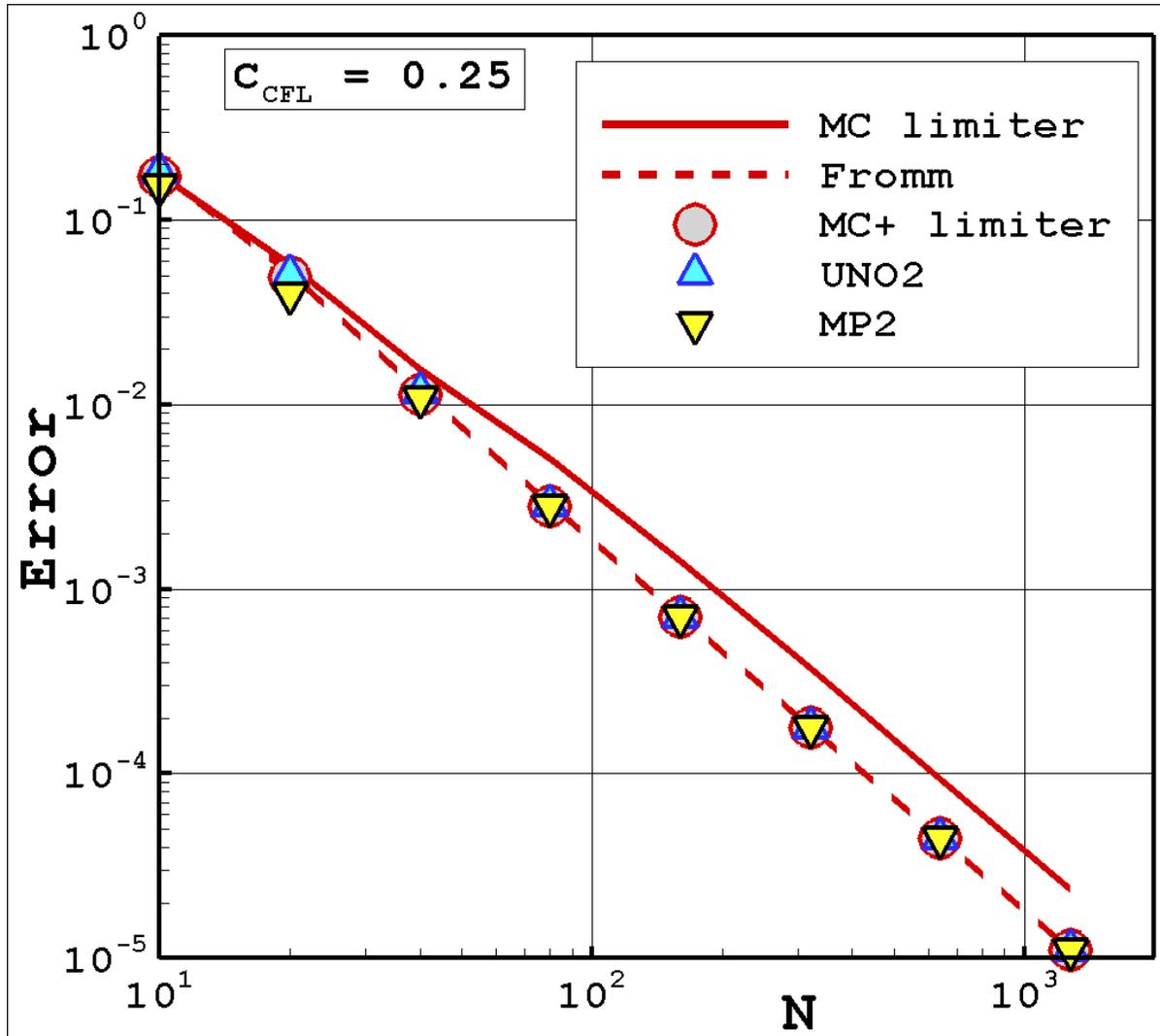
$$\Delta u_{i-1/2}^- = \begin{cases} \Delta u_{i-1/2}, & \text{if } \Delta u_i \Delta u_{i-1} \geq 0 \\ \Delta u_{i-1/2} - 0.5 \Delta u_{i-1}, & \text{if } \Delta u_i \Delta u_{i-1} < 0 \end{cases}$$

$$\Delta u_{i+1/2}^+ = \begin{cases} \Delta u_{i+1/2}, & \text{if } \Delta u_i \Delta u_{i+1} \geq 0 \\ \Delta u_{i+1/2} - 0.5 \Delta u_{i+1}, & \text{if } \Delta u_i \Delta u_{i+1} < 0 \end{cases}$$

□ **Rodionov A.V.** On the use of Boussinesq approximation in turbulent supersonic jet modeling // Int. J. Heat Mass Transfer, **2010**

# Схемы второго порядка с реконструкциями UNO2, MP2 и MC+

Численное решение линейного уравнения переноса:  
ступенчато-периодическая функция  $u(x)$  с гладким профилем



$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

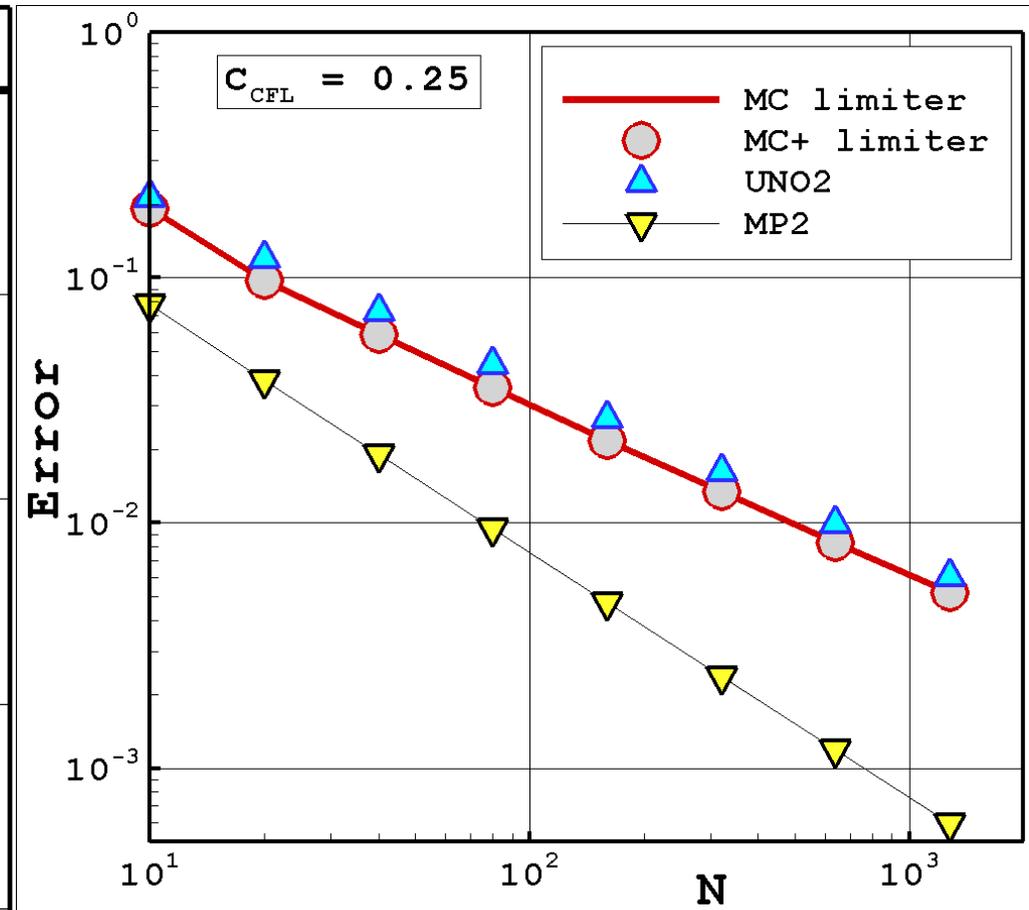
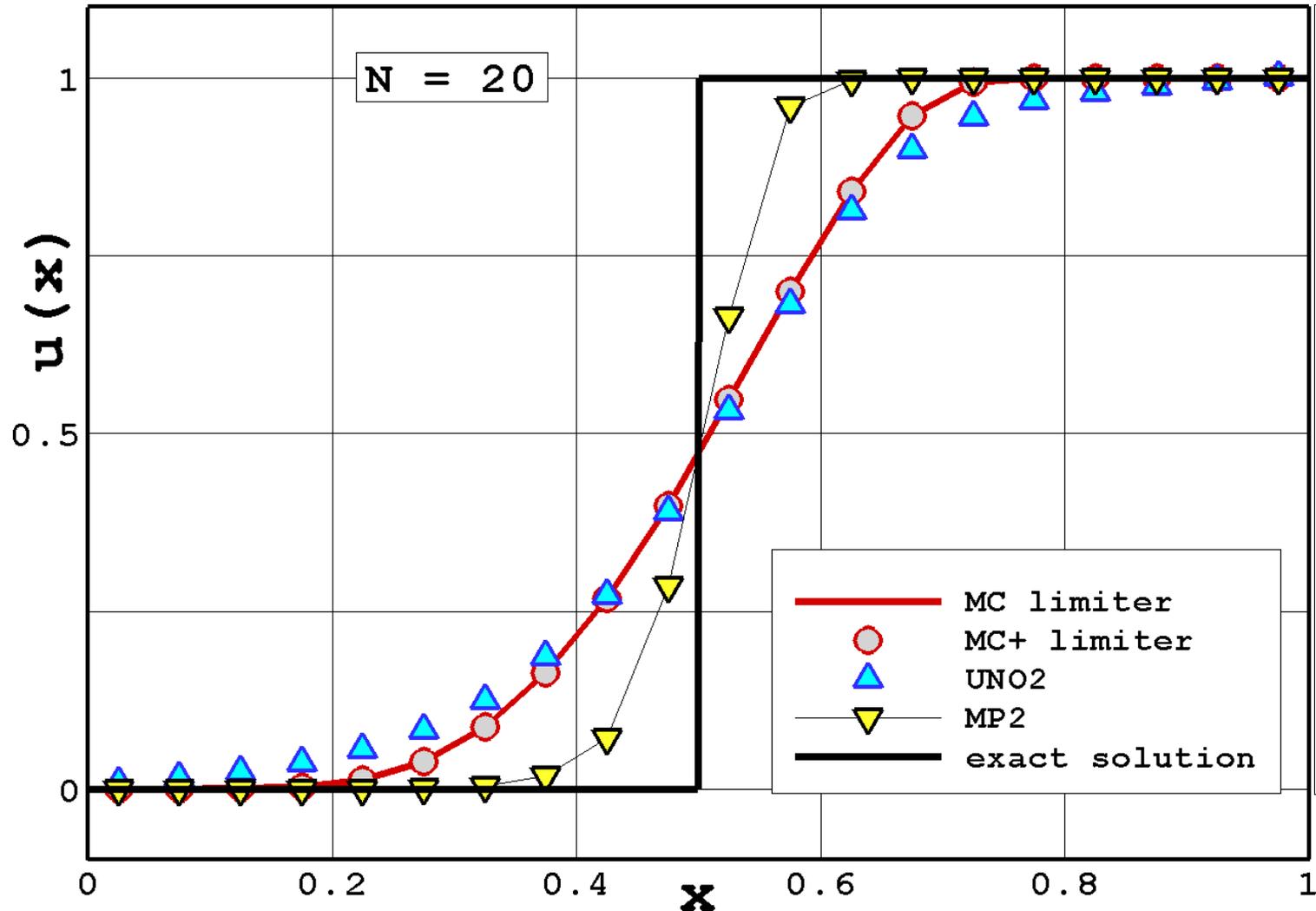
Параметры тестовой задачи:

$$a = 1, t = 10$$

$$C_{CFL} = 0.25$$

# Схемы второго порядка с реконструкциями UNO2, MP2 и MC+

Численное решение линейного уравнения переноса:  
ступенчатая функция  $u(x)$  с разрывом профиля



Параметры тестовой задачи:  
 $a = 1, t = 10, C_{CFL} = 0.25$

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ



## Construction of second order accurate monotone and stable residual distribution schemes for unsteady flow problems

Rémi Abgrall<sup>\*,1</sup>, Mohamed Mezine<sup>2</sup>



## Construction of second-order accurate monotone and stable residual distribution schemes for steady problems

Rémi Abgrall<sup>\*,1</sup>, Mohamed Mezine



WIKIPEDIA  
The Free Encyclopedia

WIKIPEDIA

## Rémi Abgrall

Rémi Abgrall (born 1961) is a French applied mathematician. He is known for his contributions in computational fluid dynamics, numerical analysis of conservation laws, multiphase flow and Hamilton–Jacobi equations.<sup>[1][2]</sup> He has been editor in chief of the Journal of Computational Physics<sup>[3]</sup> since 2015 and is part of the editorial board of several international scientific journals. In 2014 he was invited speaker at the International Congress of Mathematics<sup>[4]</sup> in Seoul. He is author of more than 100 scientific papers published in international scientific journals.<sup>[5]</sup> He is editor of 4 books<sup>[6][7][8][9]</sup> and author of one book<sup>[10]</sup> on advanced topics concerning computational fluid dynamics, high-resolution schemes and conservation laws.