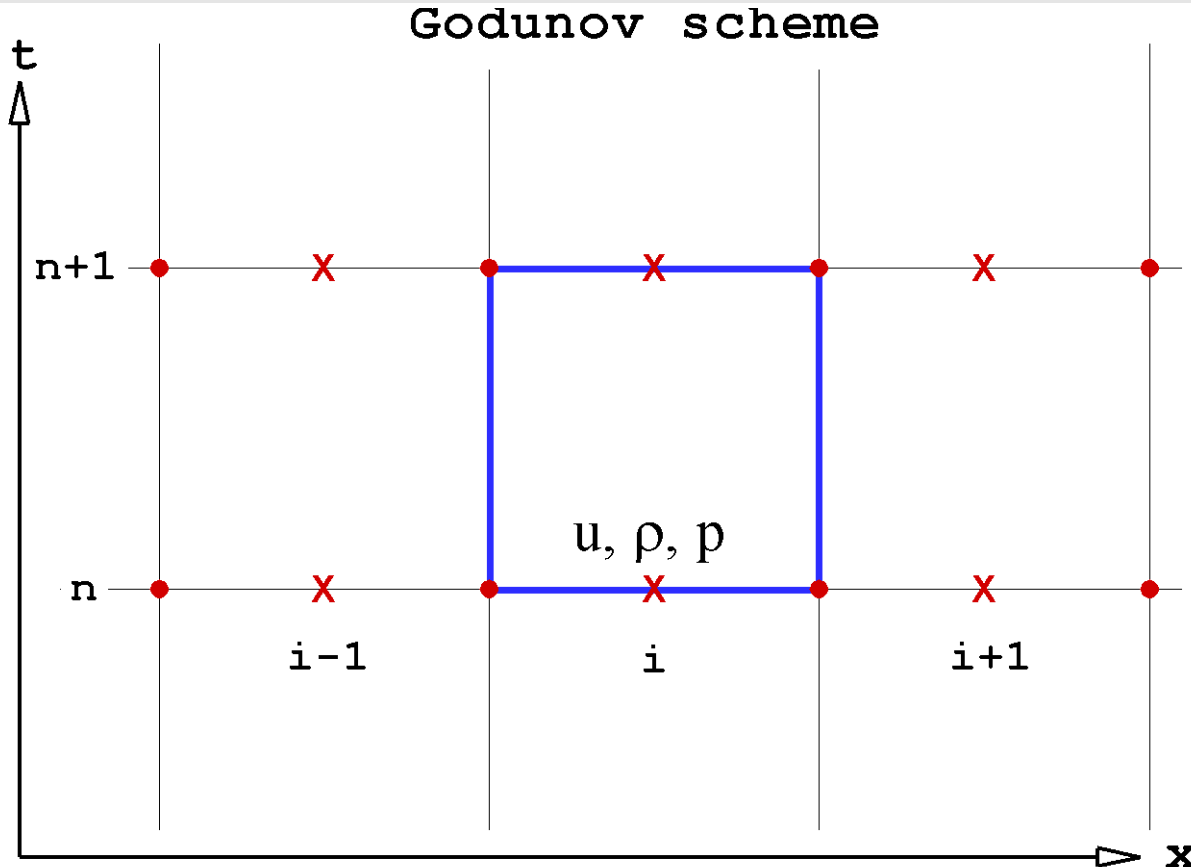


Схемы типа Годунова в вычислительной газовой динамике  
V. Монотонные схемы второго порядка точности  
(обзор)

Родионов Александр Владимирович



# Схема Годунова для уравнений газовой динамики



- на нижнем (n-ом) временном слое в каждой ячейке известны осредненные параметры потока (приписываются центрам ячеек)
- внутри ячейки параметры постоянны (кусочно-постоянное распределение на временном слое)
- параметры на боковых гранях находятся из решения задачи Римана (автомодельная задача)
- интегрирование законов сохранения дает осредненные параметры на следующем (n+1-ом) временном слое

Консервативная форма уравнений газовой динамики:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho e_0 \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(\rho e_0 + p) \end{bmatrix} = 0, \quad e_0 = \frac{u^2}{2} + e(p, \rho)$$

Векторная форма:

$$\frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{Q})}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{Q})}{\partial x} = 0, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} u \\ \rho \\ p \end{bmatrix}$$

$\mathbf{Q}$  - вектор примитивных переменных  
 $\mathbf{U}$  - вектор консервативных переменных  
 $\mathbf{F}$  - вектор потока

Интегральная форма:

$$\oint_{\Omega} (\mathbf{U} dx - \mathbf{F} dt) = 0$$

Конечно-объемная схема:

$$\frac{\mathbf{U}_i^{n+1} - \mathbf{U}_i^n}{\Delta t} + \frac{\mathbf{F}_{i+1/2}^{n+1/2} - \mathbf{F}_{i-1/2}^{n+1/2}}{\Delta x} = 0$$

# Задача Римана о распаде разрыва

Задача Коши с начальным разрывом в точке  $x = 0$ : 
$$\mathbf{Q}(x, t = 0) = \begin{cases} \mathbf{Q}_L & \text{при } x < 0, \\ \mathbf{Q}_R & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

## I. Линейное приближение (интенсивность начального разрыва невелика)

Одномерные уравнения газовой динамики сводятся к соотношениям вдоль характеристических линий:

$$\begin{aligned} du - \frac{1}{\rho a} dp = 0 & \text{ вдоль линий } \frac{dx}{dt} = u - a ; \\ du + \frac{1}{\rho a} dp = 0 & \text{ вдоль линий } \frac{dx}{dt} = u + a \end{aligned}$$

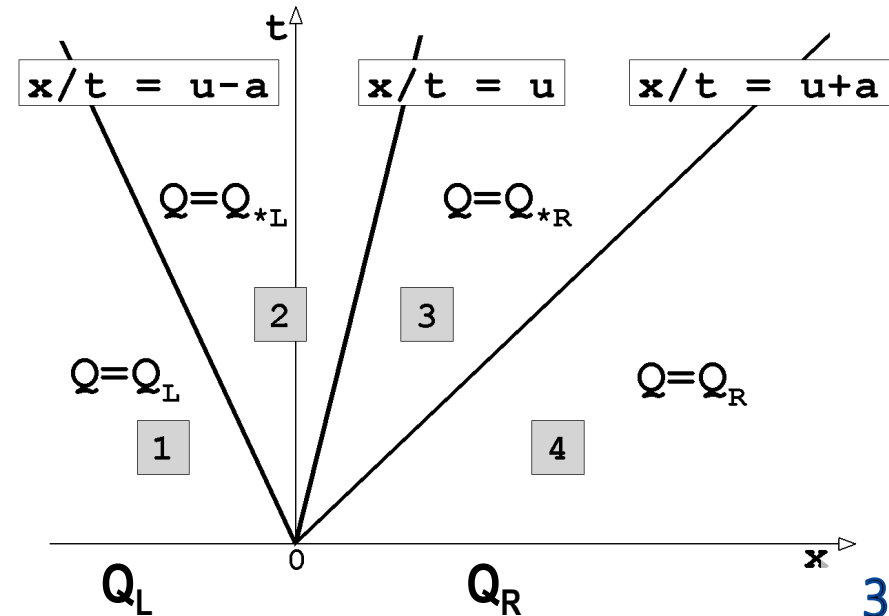
$$d\rho - \frac{1}{a^2} dp = 0 \text{ вдоль линий } \frac{dx}{dt} = u$$

Параметры газа в областях 2 и 3:

$$u_* = u_{*L} = u_{*R} = \frac{u_L \rho_L a_L + u_R \rho_R a_R + p_L - p_R}{\rho_L a_L + \rho_R a_R}$$

$$p_* = p_{*L} = p_{*R} = \frac{p_L \rho_R a_R + p_R \rho_L a_L + (u_L - u_R) \rho_L a_L \rho_R a_R}{\rho_L a_L + \rho_R a_R}$$

$$\rho_{*L} = \rho_L + \frac{1}{a_L^2} (p_* - p_L), \quad \rho_{*R} = \rho_R + \frac{1}{a_R^2} (p_* - p_R)$$



# Задача Римана о распаде разрыва

## II. Нелинейное решение (для совершенного газа с $\gamma = \text{const}$ )

Определение скорости и давления в областях 2 и 3:

$$u_* = u_L - f(p_*, \mathbf{Q}_L), \quad u_* = u_R + f(p_*, \mathbf{Q}_R)$$

sw = ударная волна ( $p_* > p$ ):

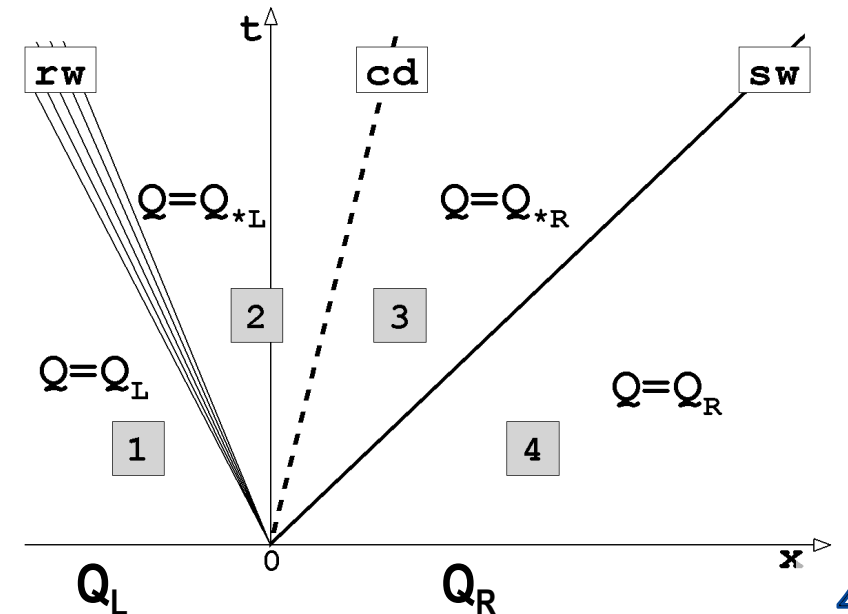
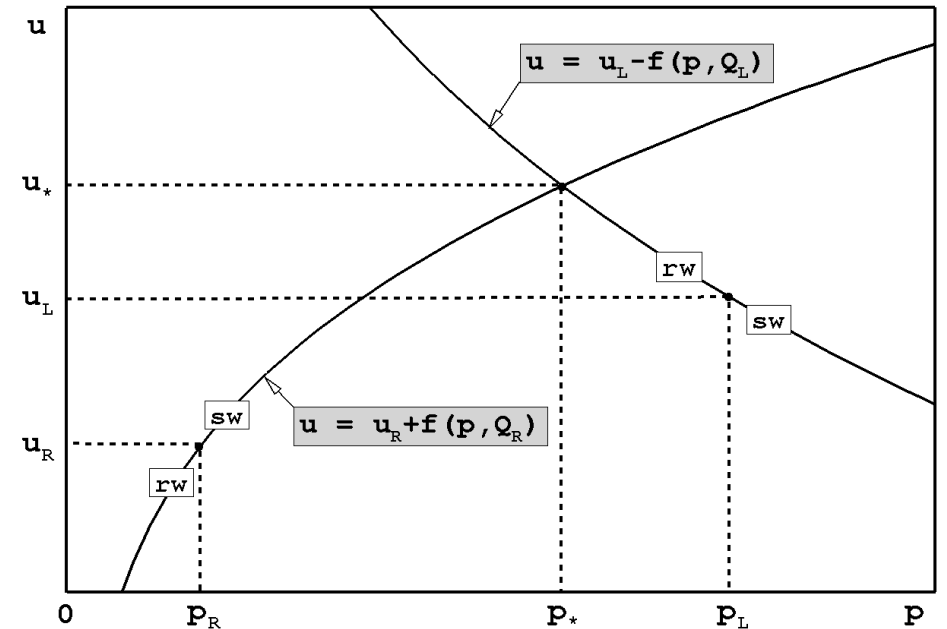
$$f(p_*, \mathbf{Q}) = \frac{p_* - p}{\sqrt{\rho[(\gamma + 1)p_* + (\gamma - 1)p] / 2}}$$

$$\frac{\rho_*}{\rho} = \frac{(\gamma + 1)p_* + (\gamma - 1)p}{(\gamma - 1)p_* + (\gamma + 1)p}$$

rw = веер разрежения ( $p_* < p$ ):

$$f(p_*, \mathbf{Q}) = \frac{2a}{\gamma - 1} \left[ \left( \frac{p_*}{p} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - 1 \right]$$

$$\frac{\rho_*}{\rho} = \left( \frac{p_*}{p} \right)^{1/\gamma}$$



## Схема Годунова для линейного уравнения переноса

Линейное уравнение переноса:  $\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0$  при  $a = \text{const} > 0$

Точное решение:  $u = \text{const}$  вдоль характеристик  $x - at = \text{const}$

Схема Годунова:  $\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a \frac{u_{i+1/2}^{n+1/2} - u_{i-1/2}^{n+1/2}}{\Delta x} = 0$ , где  $u_{i+1/2}^{n+1/2} = u_i^n$ ;  $u_{i-1/2}^{n+1/2} = u_{i-1}^n$  при  $a > 0$

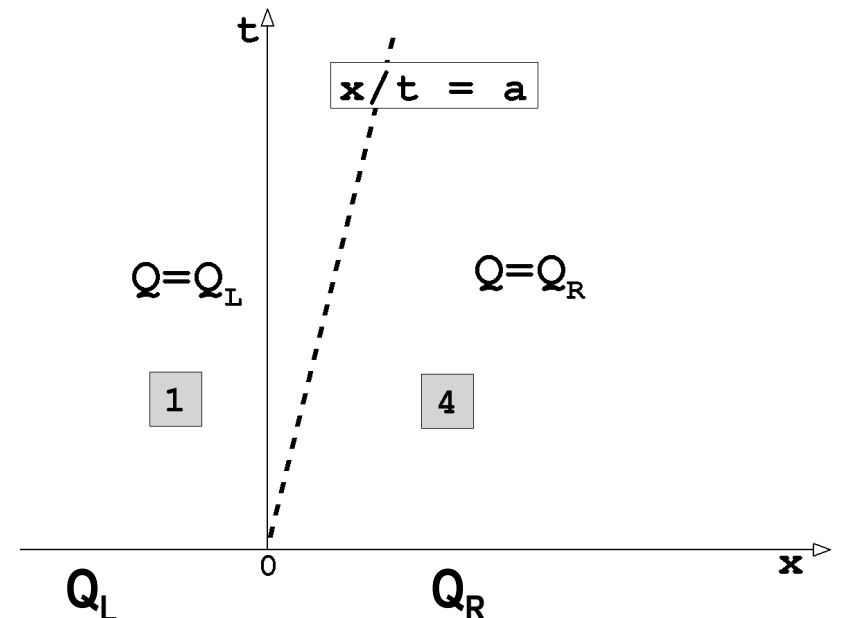
или  $u_i^{n+1} = (1 - C_{CFL})u_i^n + C_{CFL}u_{i-1}^n$ , где  $C_{CFL} = a\Delta t / \Delta x$

Решение задачи Римана для линейного уравнения переноса:

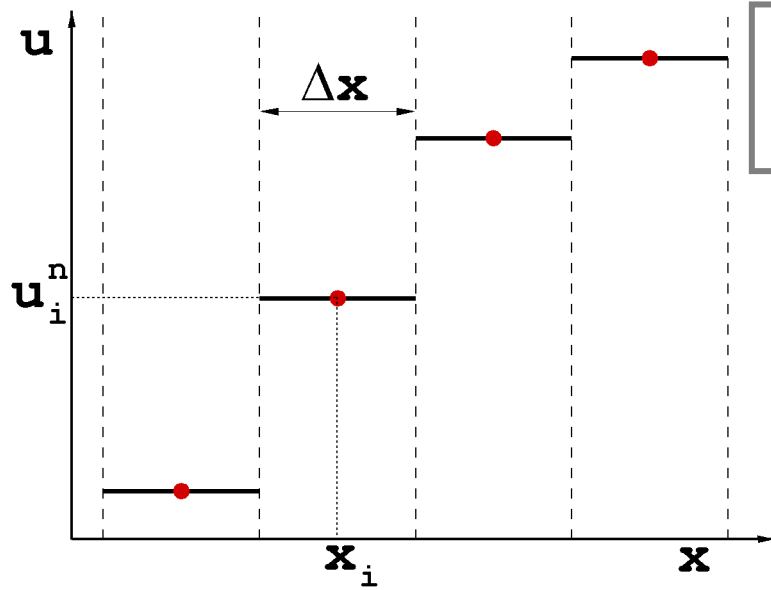
$$Q(x=0, t) = \begin{cases} Q_L & \text{при } a > 0, \\ Q_R & \text{при } a < 0. \end{cases}$$

или

$$u_{i+1/2}^{n+1/2} = \begin{cases} u_i^n & \text{при } a > 0, \\ u_{i+1}^n & \text{при } a < 0. \end{cases}$$



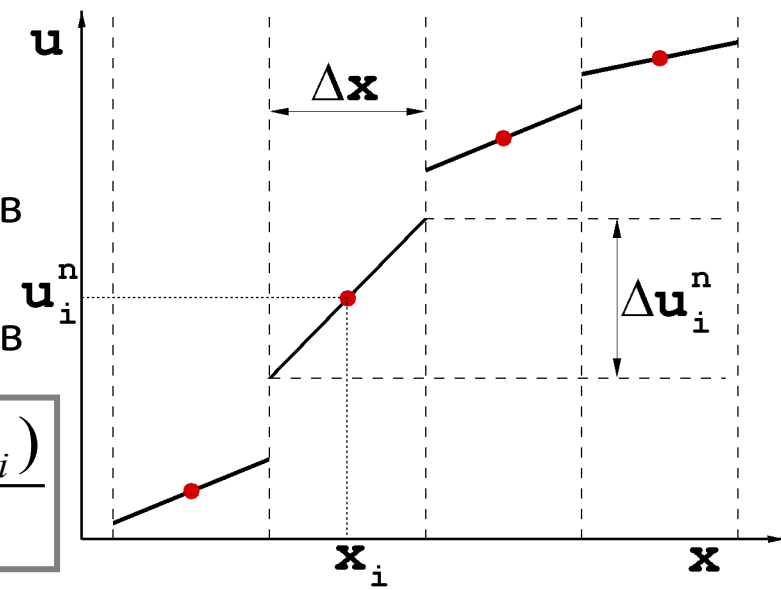
# Схемы Колгана и ван Лира



$$u^n(x) = u_i^n$$

Замена  
кусочно-постоянного  
распределения параметров  
на кусочно-линейное  
распределение параметров

$$u^n(x) = u_i^n + \Delta u_i^n \frac{(x - x_i)}{\Delta x}$$



- ❑ **Колган В.П.** Применение принципа минимальных значений производных к построению конечно-разностных схем для расчета разрывных решений газовой динамики // Ученые записки ЦАГИ, **1972**

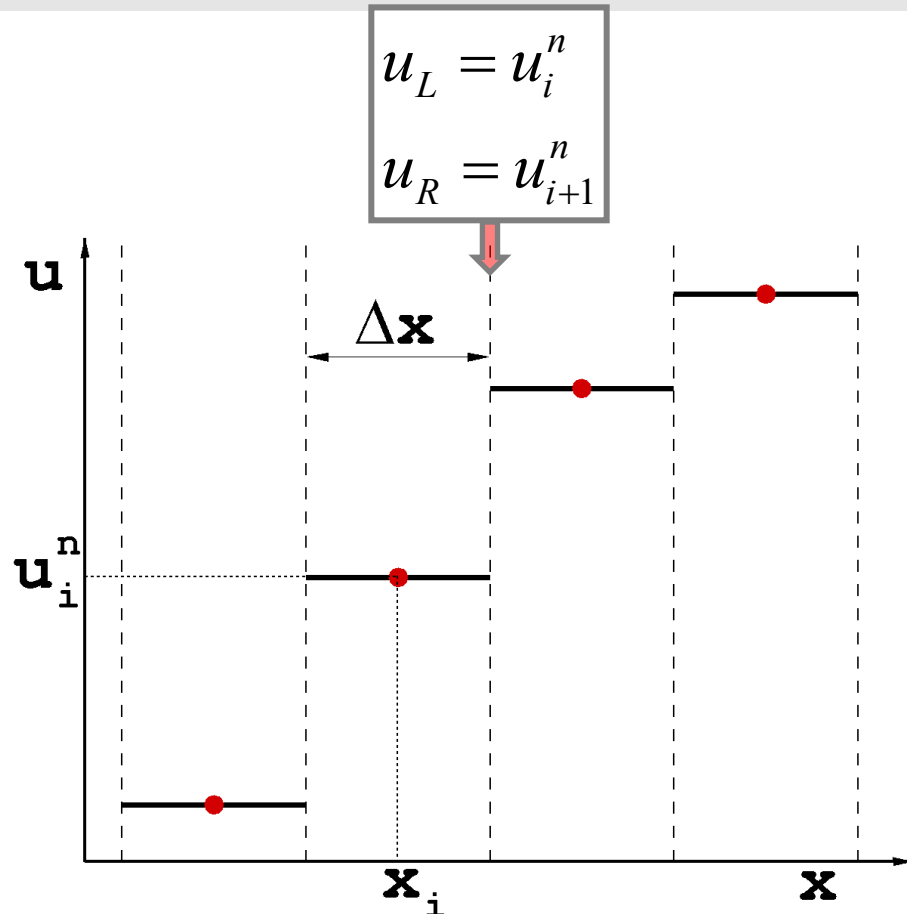
$$\Delta u_i^n = \text{minmod}_{\text{Kolgan}}(u_{i+1}^n - u_i^n, u_i^n - u_{i-1}^n), \text{ где } \text{minmod}_{\text{Kolgan}}(a, b) \equiv \begin{cases} a, & \text{if } |a| < |b|, \\ b, & \text{if } |b| < |a|. \end{cases}$$

- ❑ **van Leer B.** Towards the ultimate conservative difference scheme:  
IV. A new approach to numerical convection // J. Comp. Phys., **1977**

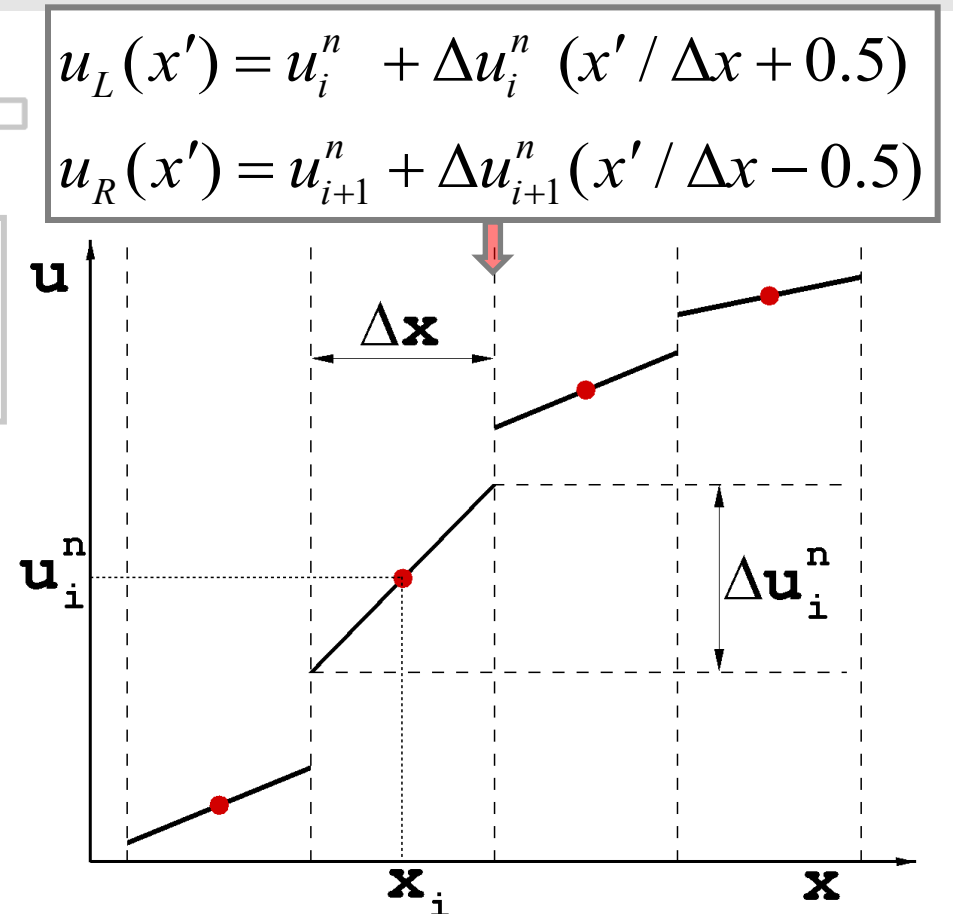
$$\Delta u_i^n = \text{minmod} \left[ (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) / 2, 2 \cdot \text{minmod}(u_{i+1}^n - u_i^n, u_i^n - u_{i-1}^n) \right]$$

$$\text{minmod}(a, b) \equiv \begin{cases} a, & \text{if } a^2 < ab, \\ b, & \text{if } b^2 < ab, \\ 0, & \text{if } ab < 0. \end{cases}$$

# Схемы Колгана и ван Лира



где  $x' = x - x_{i+1/2}$ ,  
 $x_{i+1/2} = x_i + 0.5\Delta x$



## Уравнения газовой динамики

Точное решение классической задачи Римана

## Линейное скалярное уравнение ( $a > 0$ )

$$u_{i+1/2} = u_i^n + 0.5\Delta u_i^n$$

## Моно-сть

$$C_{CFL} \leq 2/3$$

□ Колган В.П. (1972)

Приближенное решение обобщенной задачи Римана

$$u_{i+1/2} = u_i^n + 0.5(1 - C_{CFL})\Delta u_i^n$$

$$C_{CFL} \leq 1$$

□ van Leer B. (1977-79)

# Методы типа MUSCL-Hancock

❑ *van Albada G.D., van Leer B., Roberts W.W. (1982)*

❑ *van Leer B. (1984)*

❑ *Hancock S.L. private communication (1980)*

$$Q(x, t) = Q_i + \frac{\Delta Q_i}{\Delta x} (x - x_i) + \left( \frac{\partial Q}{\partial t} \right)_i (t - t^n)$$

$$U(x, t) = U_i + \frac{\Delta U_i}{\Delta x} (x - x_i) + \left( \frac{\partial U}{\partial t} \right)_i (t - t^n)$$

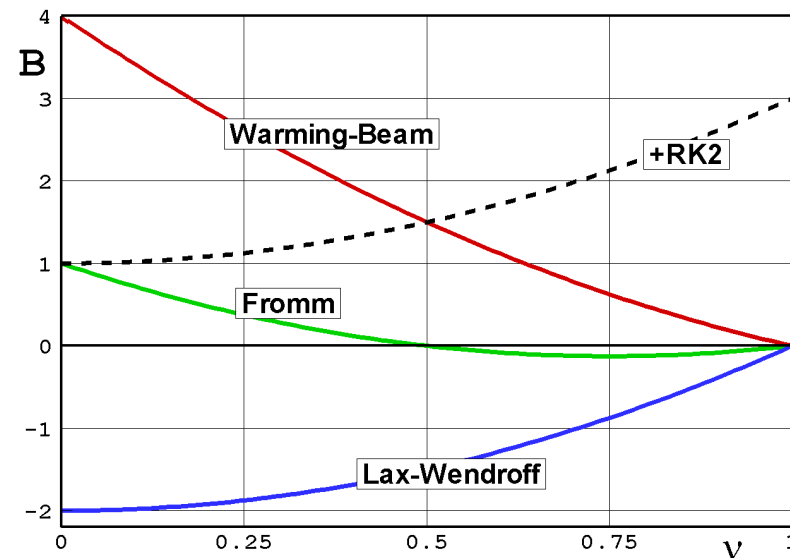
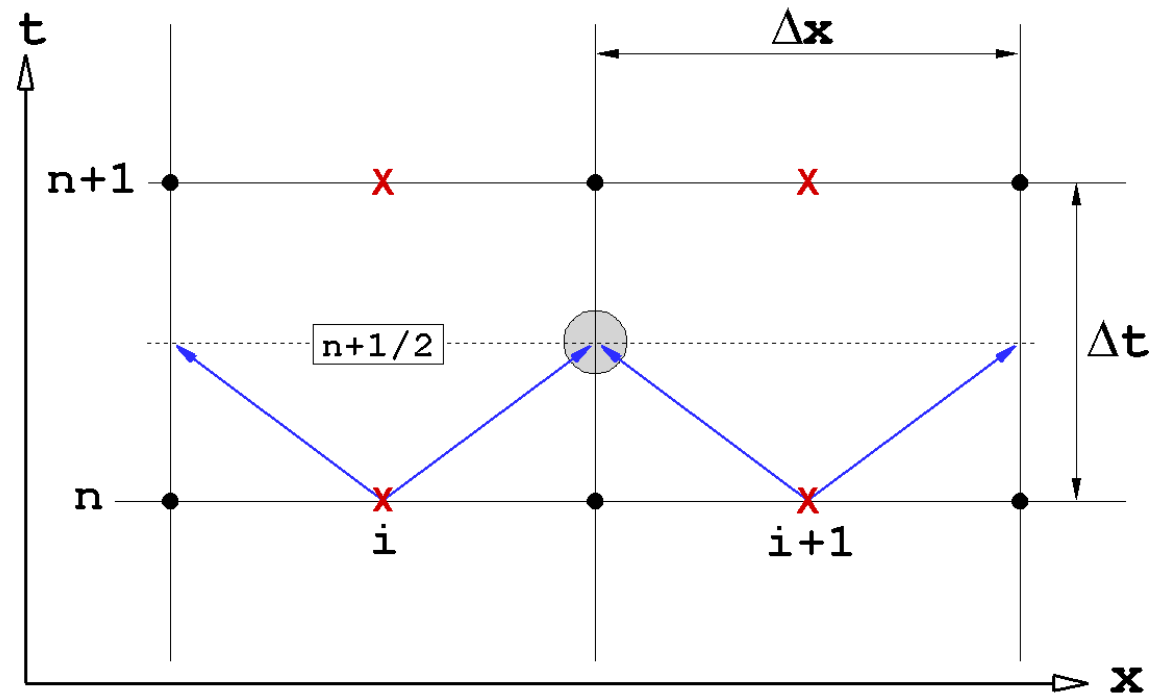
❑ *Родионов А.В. (1987)*

Схема Родионова, схема Годунова-Колгана-Родионова  
метод Хэнкока-Родионова (HR method)

$$Q_{i-1/2} = Q_i^n - 0.5 \Delta Q_i^n, \quad Q_{i+1/2} = Q_i^n + 0.5 \Delta Q_i^n$$

предиктор: 
$$\frac{U(\hat{Q}_i^{n+1}) - U(Q_i^n)}{\Delta t} + \frac{F(Q_{i+1/2}) - F(Q_{i-1/2})}{\Delta x} = 0$$

$$\left( \frac{\partial Q}{\partial t} \right)_i = \frac{\hat{Q}_i^{n+1} - Q_i^n}{\Delta t}$$

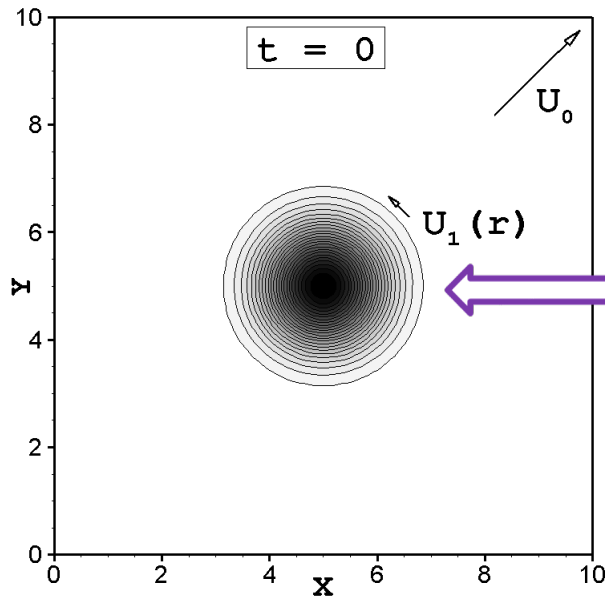
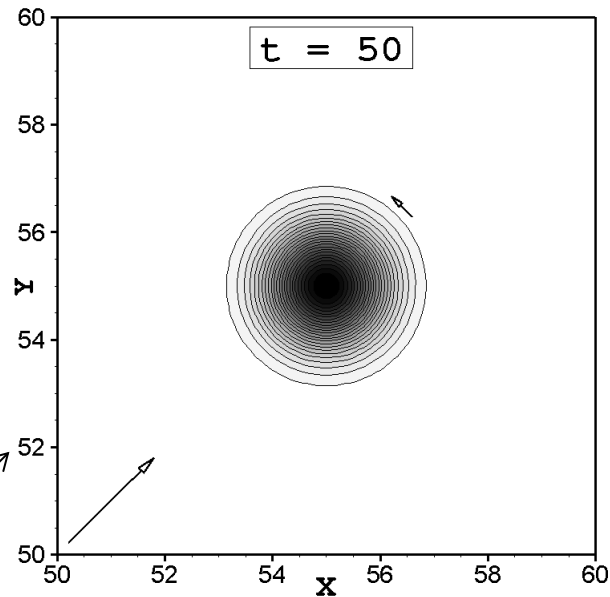


$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{a \Delta x^2}{12} B(\nu) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + O(\Delta x^3)$$

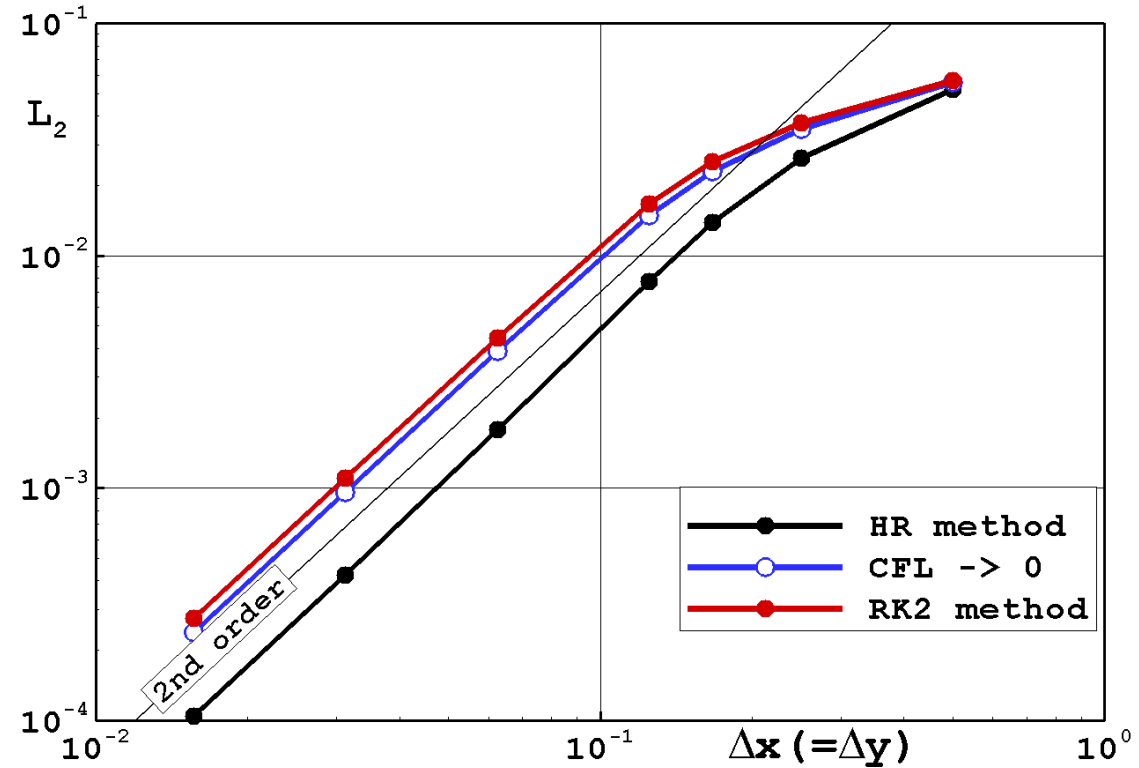
# Сравнение различных методов интегрирования по времени

## Тестовая задача о диагональном переносе изоэнтропического вихря

Диагональный перенос  
 $\mathbf{U}_0 = (1, 1)$



Вращение относительно центра  
$$\mathbf{U}_1(r) = \frac{5}{2\pi} \exp\left(\frac{1-r^2}{2}\right) (-\bar{y}, \bar{x})$$



Погрешность расчета по норме  $L_2$  для различных методов в зависимости от сеточного разрешения

- ❑ **Harten A.** High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // J. Comput. Phys., **1983**
- ❑ **Harten A.** On a class of high resolution total variation stable finite difference schemes // SIAM J. Numer. Anal., **1984**

Хартен ввел понятие TVD-схема:  
требование невозрастания полной  
вариации решения.

\* \* \*

**Total Variation Diminishing  
(TVD)**

## TVD scheme

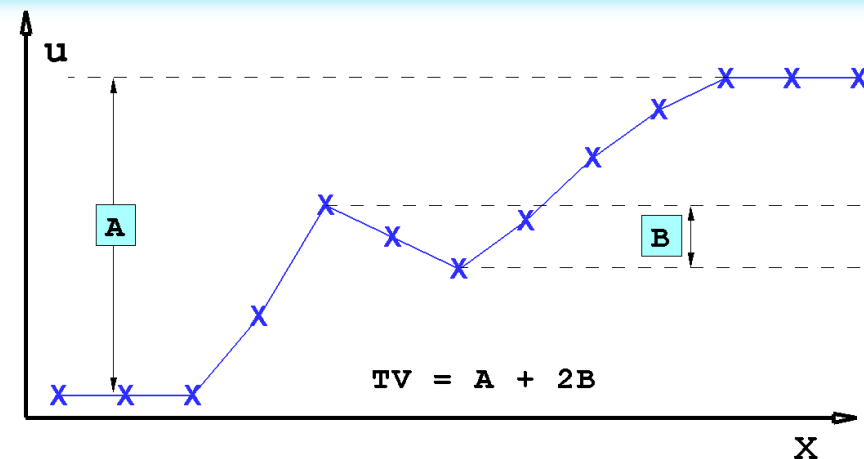
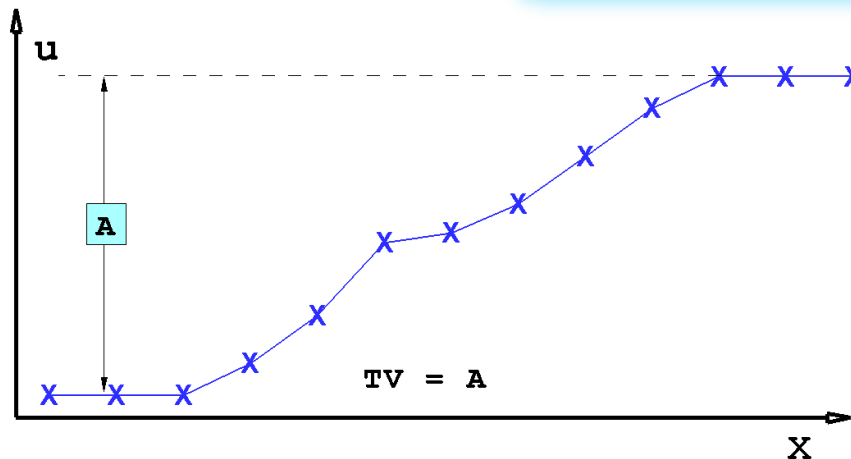
**From CFD-Wiki**

A scheme is said to be TVD or Total Variation Diminishing if it does not increase the total variation of the solution, i.e.,

$$TV(u^{n+1}) \leq TV(u^n)$$

The total variation of a grid function is defined as

$$TV(u) = \sum_j |u_{j+1} - u_j|$$



# Область существования TVD-схем

□ **Sweby P.K.** High Resolution Schemes Using Flux Limiters for Hyperbolic Conservation Laws // SIAM J. Numer. Anal., 1984

Уравнение переноса:  $\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0$  при  $a = \text{const} > 0$ .

Численная схема:  $\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a \frac{u_{i+1/2}^{n+1/2} - u_{i-1/2}^{n+1/2}}{\Delta x} = 0$ .

MUSCL-схема:  $u_{i+1/2}^{n+1/2} = u_i^n + 0.5(1 - \nu) \Delta u_i^n$ ,

где  $\nu = C_{CFL} = a \Delta t / \Delta x$

Формулировка Свеби:  $\Delta u_i^n = \phi(r_i)(u_{i+1}^n - u_i^n)$ , где  $r_i = \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{u_{i+1}^n - u_i^n}$

## Линейные схемы второго порядка точности

Правая разность: схема Лакса-Вендроффа  $\phi = 1$

Центральная разность: схема Фромма  $\phi = (1 + r) / 2$

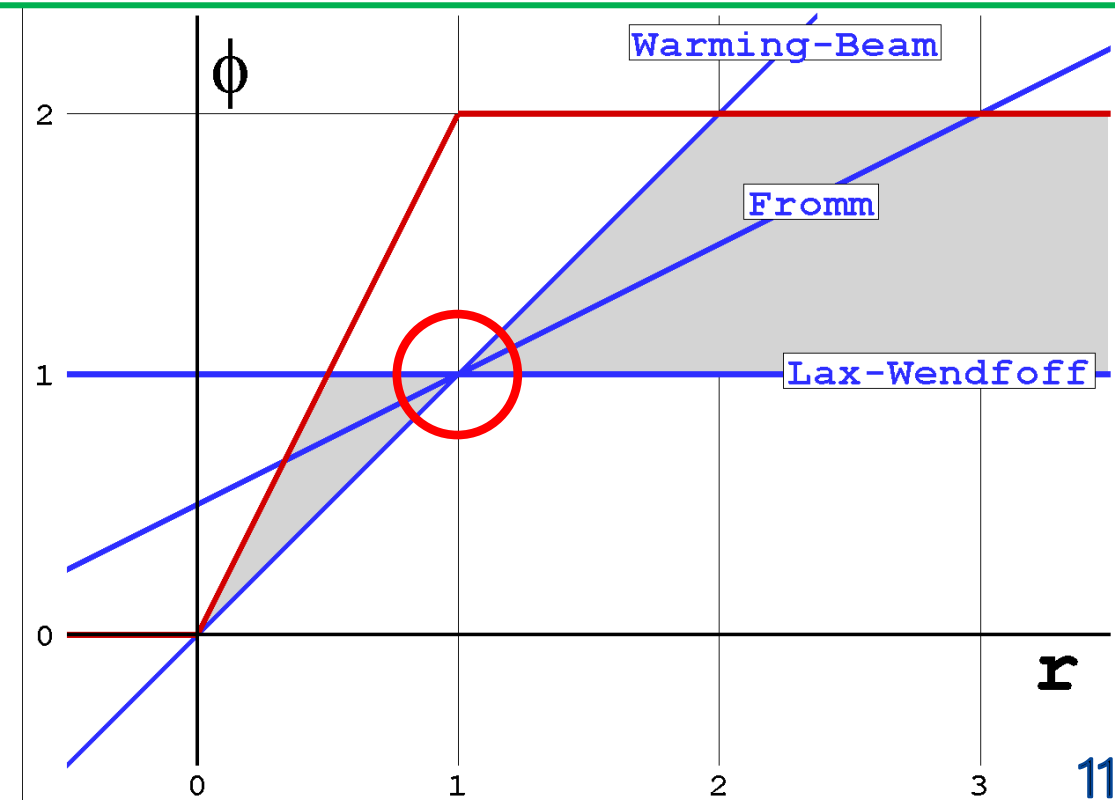
Левая разность: схема Уорминга-Бима  $\phi = r$

## Ограничитель ван Ли (TVD-условие Хартена)

Разности разного знака  $\phi = 0$

Удвоенная правая разность  $\phi = 2$

Удвоенная левая разность  $\phi = 2r$



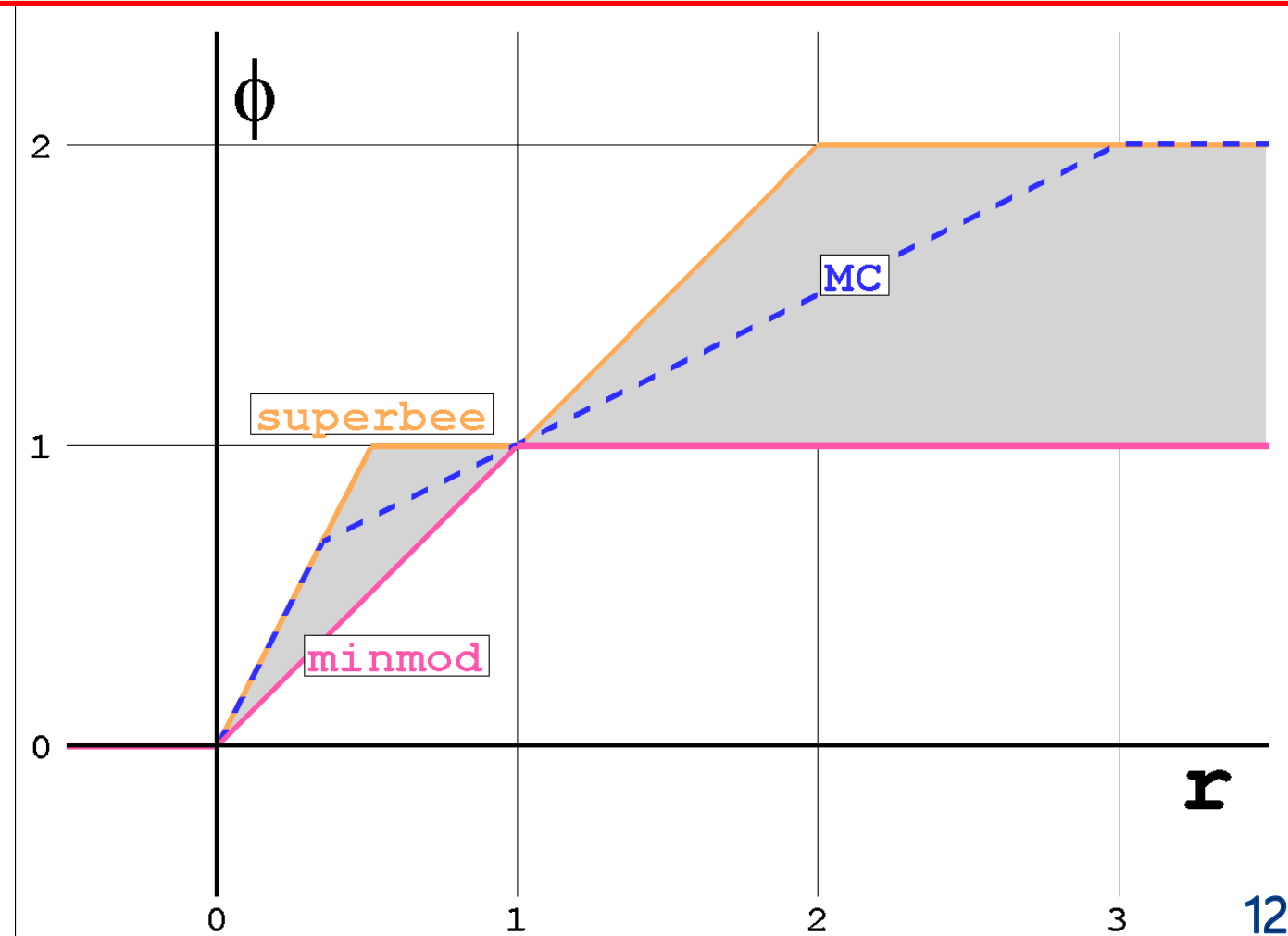
# Реконструкции-ограничители MC, minmod и superbee

- ❑ **van Leer B.** Towards the ultimate conservative difference scheme: IV. ... // J. Comp. Phys., **1977**
- ❑ **Osher S., Chakravarthy S.** High Resolution Schemes and the Entropy Condition // SIAM J. Numer. Anal., **1984**
- ❑ **Roe P.L.** Some contributions to the modeling of discontinuous flows // Lect. Notes Appl. Math., **1985**

$$\phi^{\text{MC}}(r) = \begin{cases} \min[(1+r)/2, 2, 2r], & \text{if } r > 0, \\ 0, & \text{if } r < 0. \end{cases}$$

$$\phi^{\text{minmod}}(r) = \begin{cases} \min[1, r], & \text{if } r > 0, \\ 0, & \text{if } r < 0. \end{cases}$$

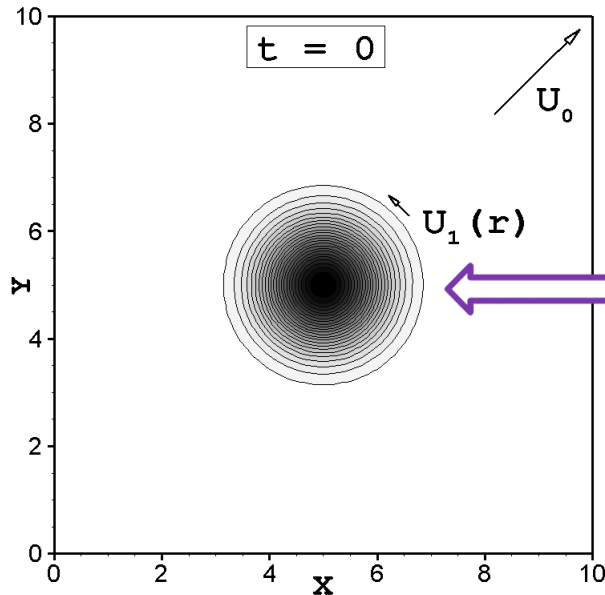
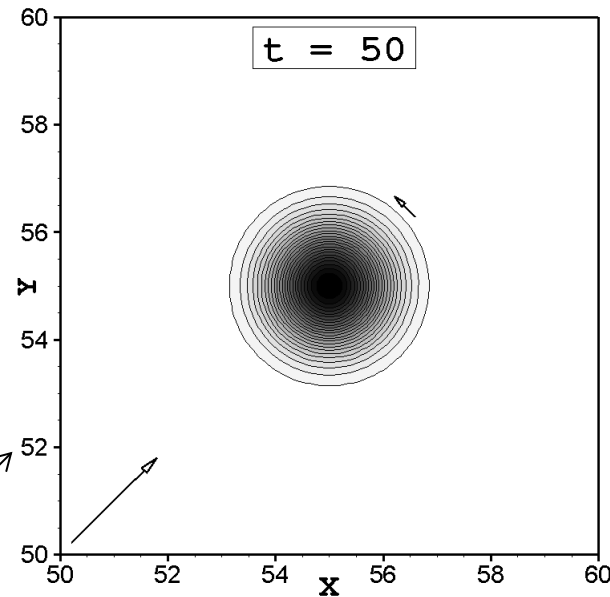
$$\phi^{\text{superbee}}(r) = \begin{cases} \min[\max(1, r), 2, 2r], & \text{if } r > 0, \\ 0, & \text{if } r < 0. \end{cases}$$



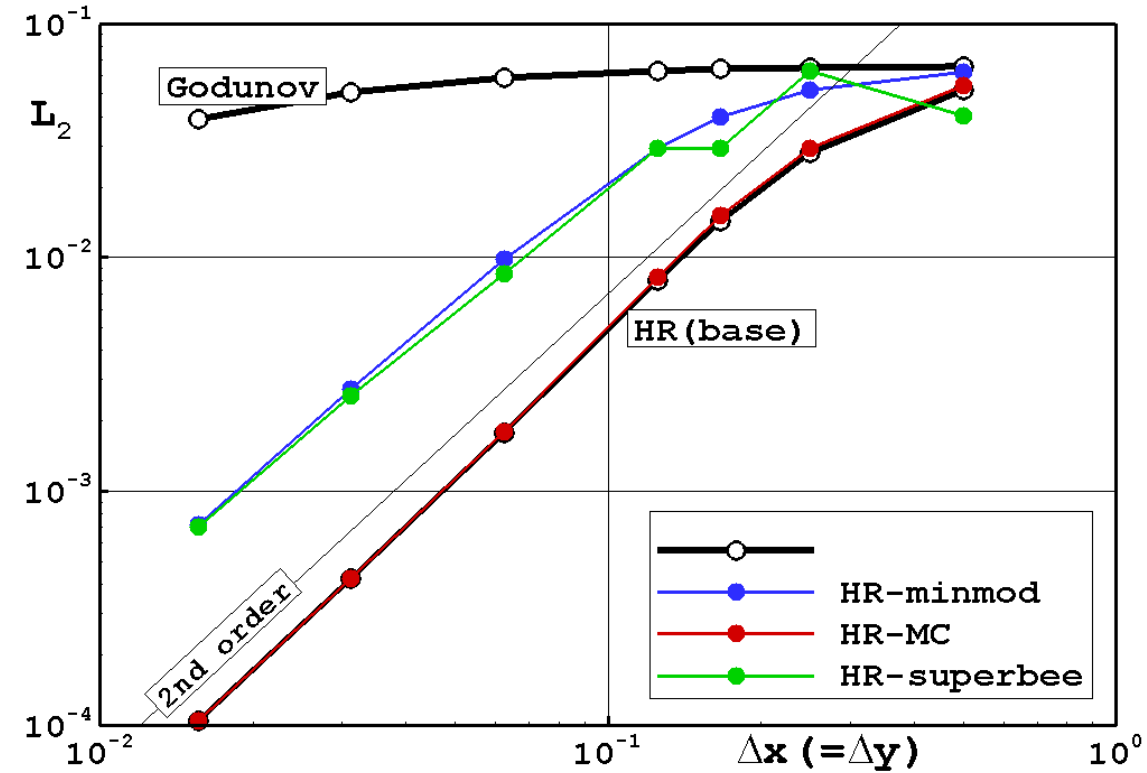
# Сравнение различных методов интегрирования по времени

## Тестовая задача о диагональном переносе изоэнтропического вихря

Диагональный перенос  
 $U_0 = (1, 1)$



Вращение относительно центра  
$$U_1(r) = \frac{5}{2\pi} \exp\left(\frac{1-r^2}{2}\right) (-\bar{y}, \bar{x})$$

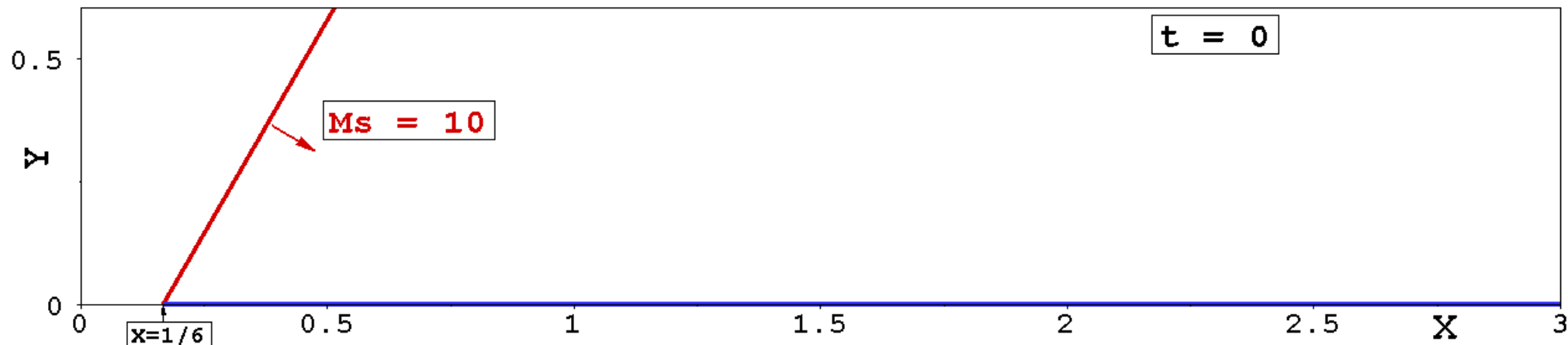


Погрешность расчета по норме  $L_2$  для различных методов в зависимости от сеточного разрешения

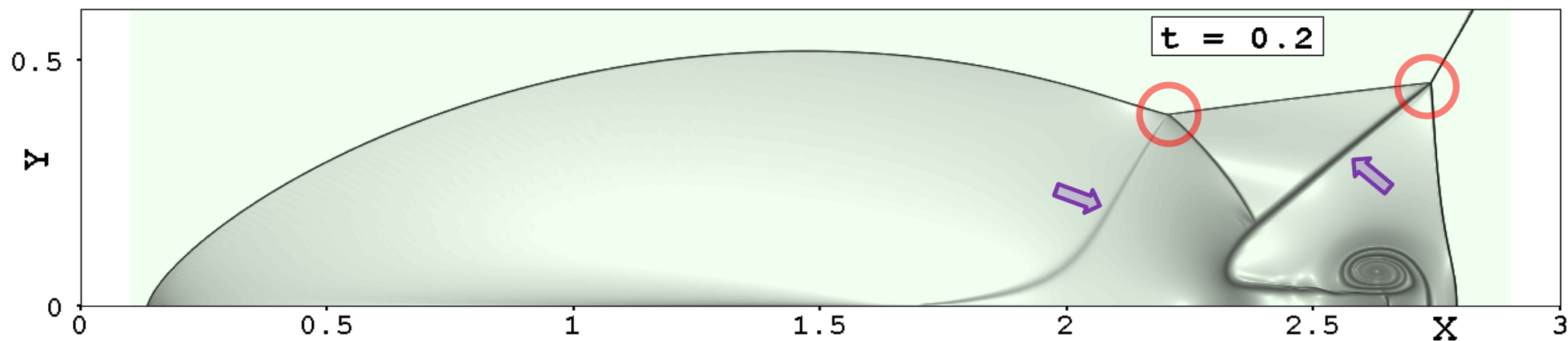
# Тестовая задача о двойном маховском отражении

□ **Woodward P.R., Colella P.** The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks // Journal of Computational Physics, **1984**

Постановка задачи



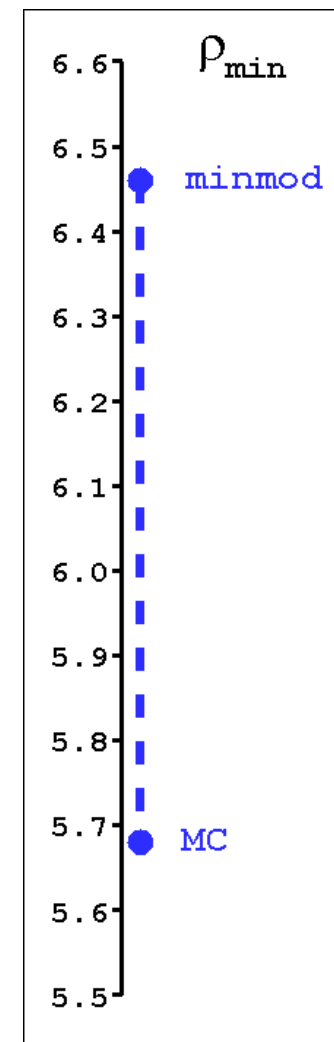
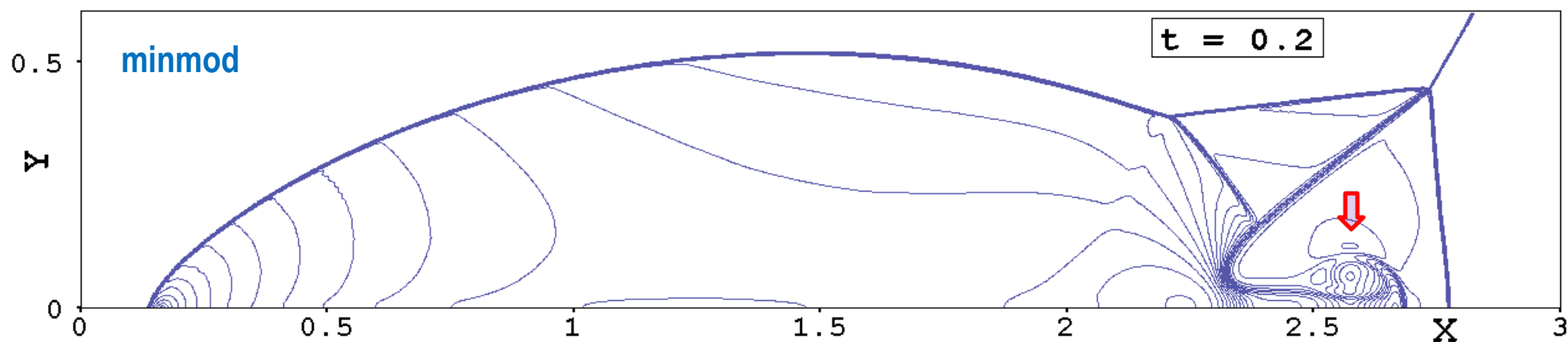
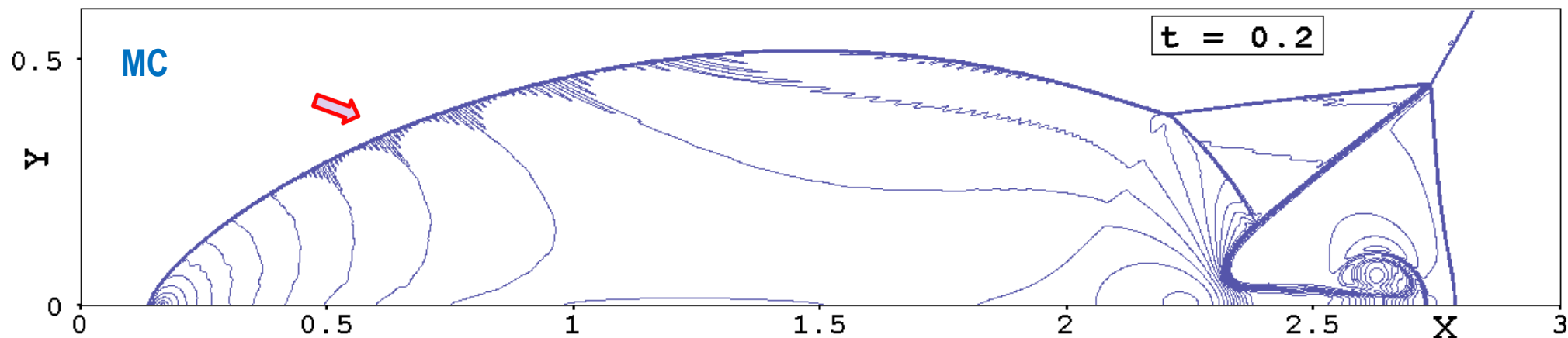
Структура течения на момент  $t = 0.2$



# Тестовая задача о двойном маховом отражении

Результаты расчета задачи методом HR с решателем задачи Римана HLL  
на сетке с  $\Delta x = \Delta y = 1/480$

Изолинии плотности



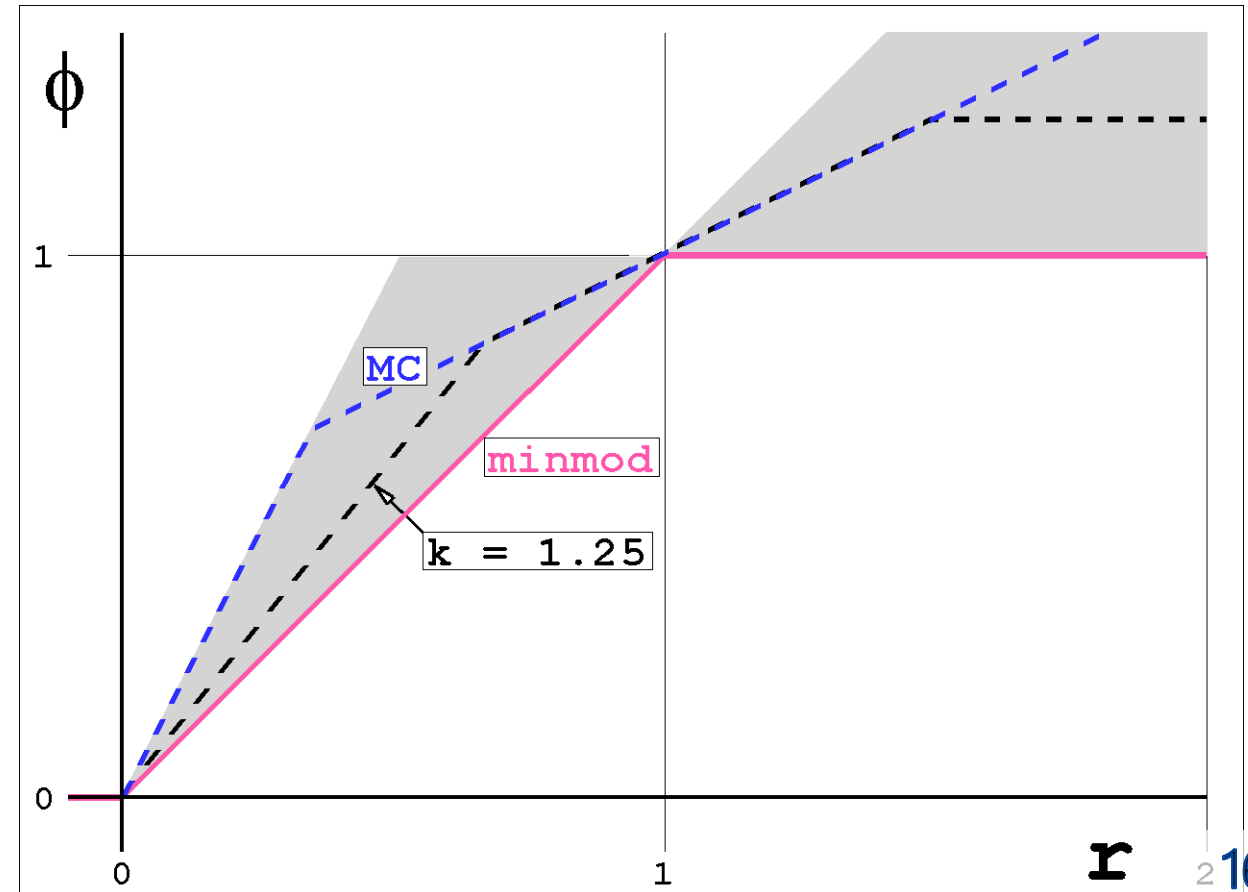
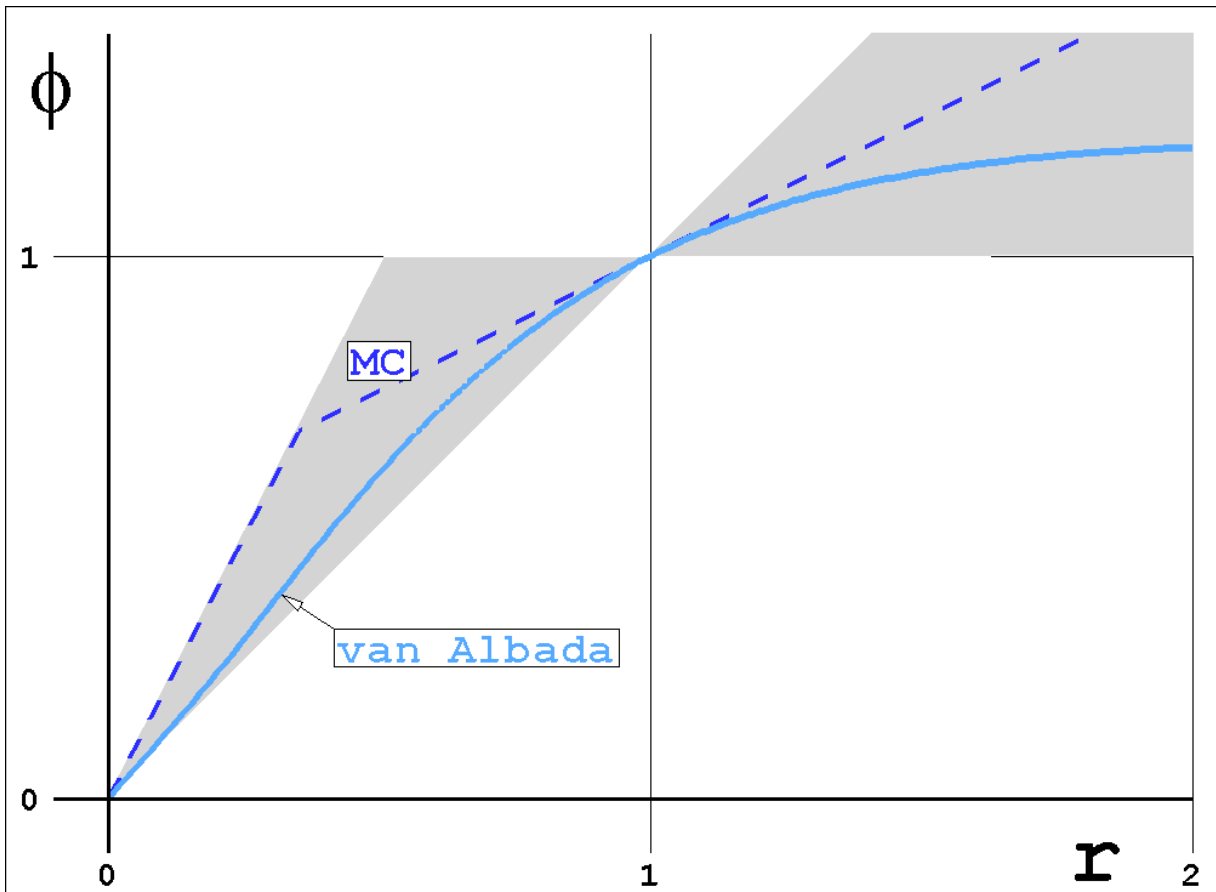
# Промежуточные реконструкции-ограничители (между MC и minmod)

Реконструкция-ограничитель ван Альбады

$$\phi^{\text{van Albada}}(r) = \begin{cases} \frac{r + r^2}{1 + r^2}, & \text{if } r > 0, \\ 0, & \text{if } r < 0. \end{cases}$$

Параметрическая реконструкция на базе ограничителя MC (параметр  $1 < k < 2$ )

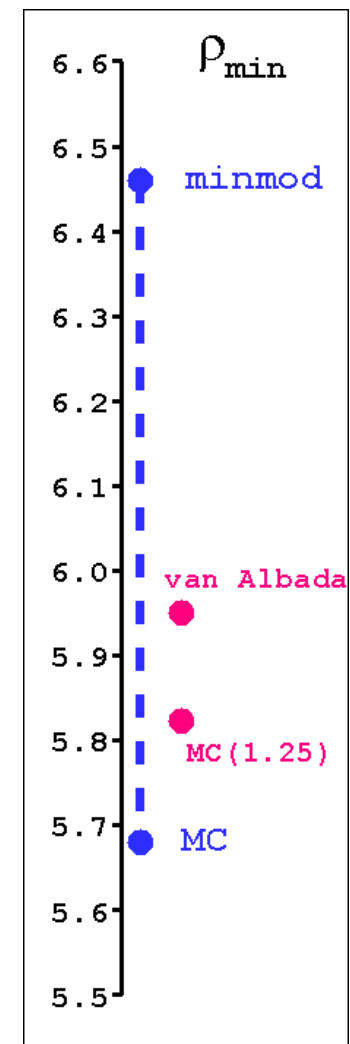
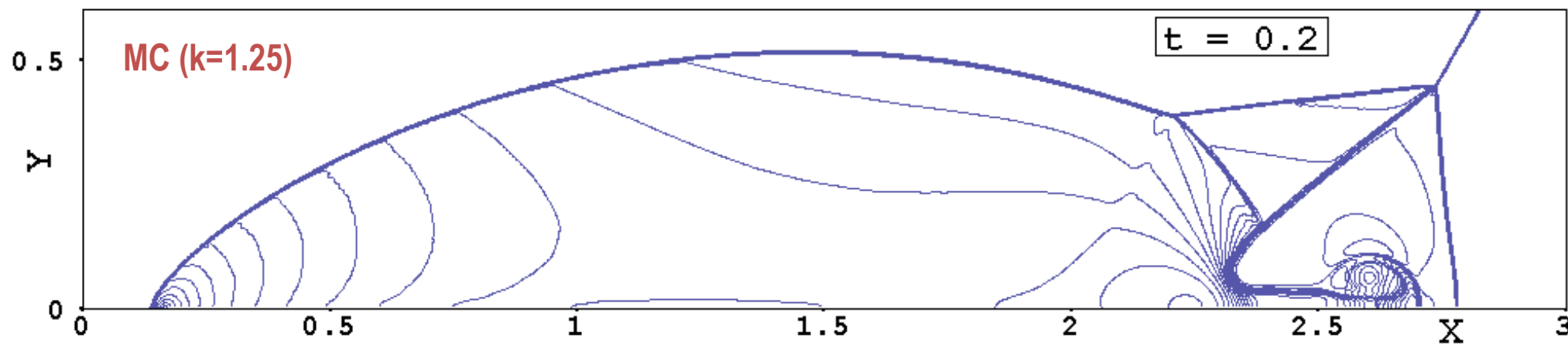
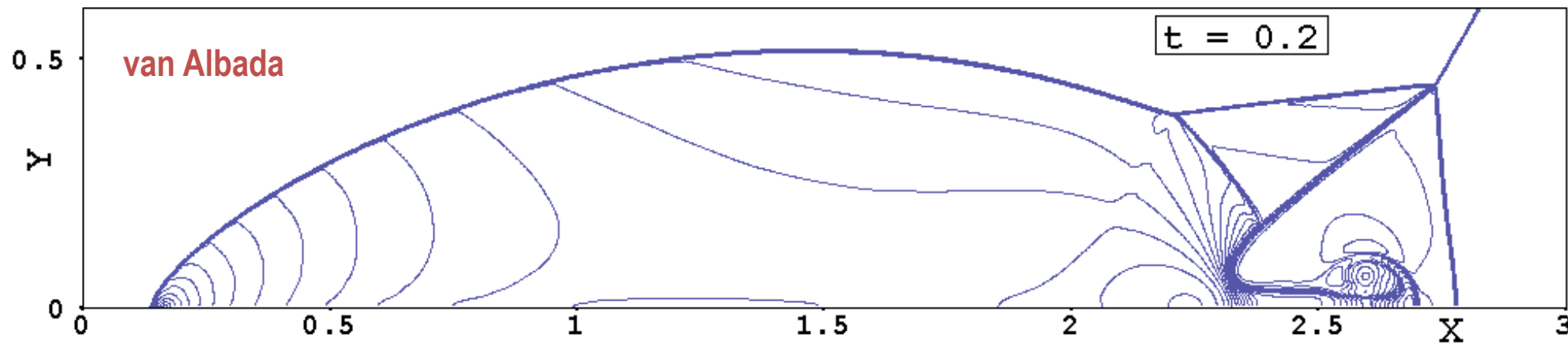
$$\phi(r) = \begin{cases} \min[(1+r)/2, k, kr], & \text{if } r > 0, \\ 0, & \text{if } r < 0. \end{cases}$$



# Тестовая задача о двойном маховском отражении

Результаты расчета задачи методом HR с решателем задачи Римана HLL  
на сетке с  $\Delta x = \Delta y = 1/480$

Изолинии плотности



## Реконструкция по характеристическим переменным

В линейном приближении одномерные уравнения газовой динамики сводятся к соотношениям вдоль характеристических линий:

$$d\rho - \frac{1}{a^2} dp = 0 \quad \text{вдоль линий} \quad \frac{dx}{dt} = u$$

$$\begin{aligned} du - \frac{1}{\rho a} dp &= 0 \quad \text{вдоль линий} \quad \frac{dx}{dt} = u - a \\ du + \frac{1}{\rho a} dp &= 0 \quad \text{вдоль линий} \quad \frac{dx}{dt} = u + a \end{aligned}$$

Вектор примитивных переменных:  $\mathbf{Q} = [u_x, u_y, \rho, p]^T$

Приращения примитивных переменных:  $\Delta \mathbf{Q}_{i-1/2,j} = \mathbf{Q}_{i,j} - \mathbf{Q}_{i-1,j}$ ,  $\Delta \mathbf{Q}_{i+1/2,j} = \mathbf{Q}_{i+1,j} - \mathbf{Q}_{i,j}$

Переход к характеристическим переменным:  $\Delta \mathbf{Z}_{i-1/2,j} = \left( \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \mathbf{Q}} \right)_{i,j} \Delta \mathbf{Q}_{i-1/2,j}$ ,  $\Delta \mathbf{Z}_{i+1/2,j} = \left( \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \mathbf{Q}} \right)_{i,j} \Delta \mathbf{Q}_{i+1/2,j}$

Применение реконструкции-ограничителя:  $\Delta \mathbf{Z}_{i,j} = f(\Delta \mathbf{Z}_{i-1/2,j}, \Delta \mathbf{Z}_{i+1/2,j})$

Возврат к примитивным переменным:  $\Delta \mathbf{Q}_{i,j} = \left( \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{Z}} \right)_{i,j} \Delta \mathbf{Z}_{i,j}$

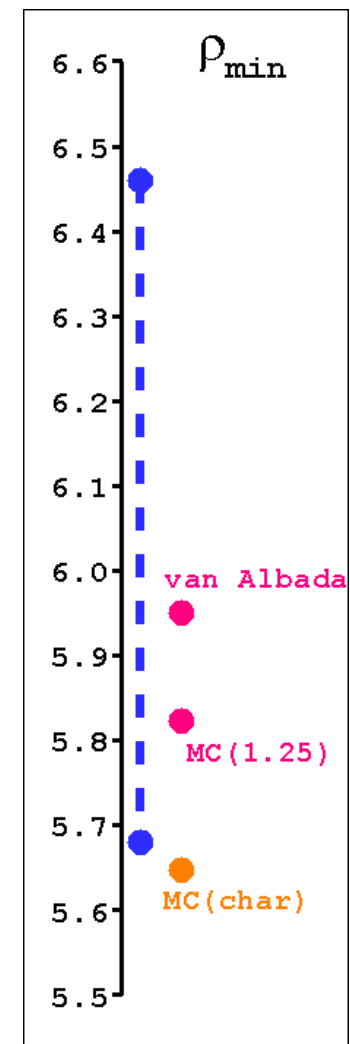
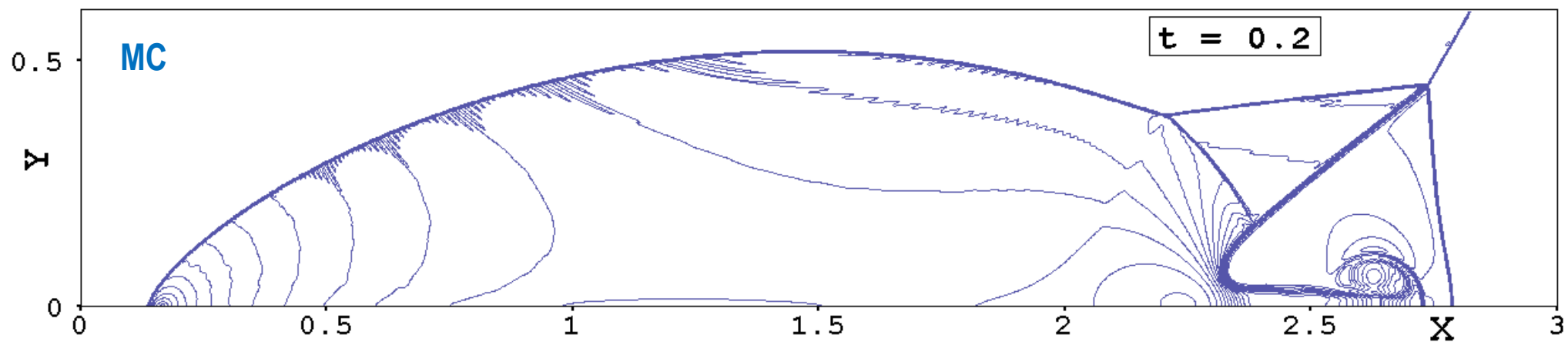
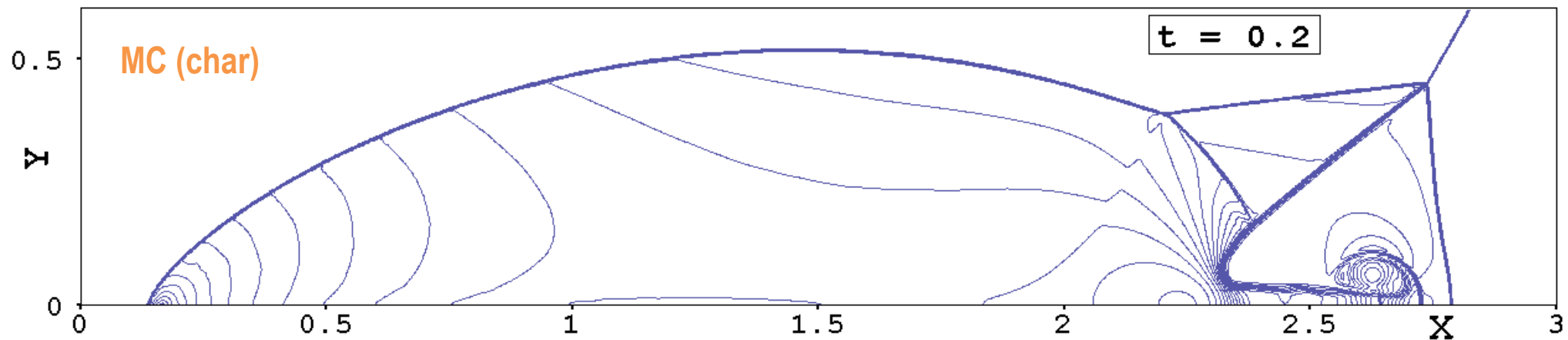
Матрицы перехода:

$$\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/\rho a \\ 1 & 0 & 0 & -1/\rho a \\ 0 & 0 & 1 & -1/a^2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ \rho/2a & -\rho/2a & 1 & 0 \\ \rho a/2 & -\rho a/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

# Тестовая задача о двойном маховском отражении

Результаты расчета задачи методом HR с решателем задачи Римана HLL  
на сетке с  $\Delta x = \Delta y = 1/480$

Изолинии плотности



# Реконструкция-ограничитель Колеллы

- **Colella P.** A direct Eulerian MUSCL scheme for gas dynamics // SIAM J. Sci. Stat. Comput., **1985**

Реконструкция-ограничитель MC (van Leer, 1977):

$$(\Delta u_i)^{MC} = \min\left[\Delta u_i, 2 \cdot \min\left(\Delta u_{i-1/2}, \Delta u_{i+1/2}\right)\right]$$

$$\frac{(\Delta u_i)^{MC}}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + O(\Delta x^2)$$

Реконструкция-ограничитель Колеллы (1985):

$$(\Delta u_i)^{Colella} = \min\left[\frac{4}{3}\Delta u_i - \frac{1}{6}\left[(\Delta u_{i-1})^{MC} + (\Delta u_{i+1})^{MC}\right], 2 \cdot \min\left(\Delta u_{i-1/2}, \Delta u_{i+1/2}\right)\right]$$

$$\frac{(\Delta u_i)^{Colella}}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + O(\Delta x^4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{a\Delta x^2}{12} B(v) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + O(\Delta x^3)$$
$$B(v) = (1-v)(1-2v)$$

- Для подавления осцилляций параметров за ударной волной используются специальные «dissipation mechanisms», которые уменьшают крутизну распределения параметров на ударной волне.
- Отказ от лагранжевого этапа расчета. Задача Римана решается дважды: (1) как в схеме Колгана, (2) на верхнем временном слое (выпускание характеристик вниз до пересечения с нижним слоем и интерполяцией).
- В многомерных расчетах используется расщепление по координатам.

# Реконструкции-ограничители UNO2, MP2 и MC+

- **Harten A., Osher S.** Uniformly high-order accurate nonoscillatory ... // SIAM J. Numer. Anal., **1987**

UNO2 = Uniformly 2nd-order accurate Non-Oscillatory

Формула для расчета приращений функции в  $i$ -ой ячейке:

$$\Delta u_i = \text{minmod} \left( u_{i+1} - u_i - \frac{1}{2} d_{i+1/2}, u_i - u_{i-1} + \frac{1}{2} d_{i-1/2} \right)$$

где  $d_{i+1/2}$  – вторые разности (аппроксимируют вторую производную функции с точностью до множителя  $1/\Delta x^2$ ); вычисляются как

$$d_{i+1/2} = \text{minmod} (u_{i+2} - 2u_{i+1} + u_i, u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1})$$

$$d_{i-1/2} = \text{minmod} (u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}, u_i - 2u_{i-1} + u_{i-2})$$

- **Huynh H.T.** Accurate upwind methods for the Euler equations // SIAM J. Numer. Anal., **1995**

MP2 = 2nd-order accurate Monotonicity-Preserving

- **Rodionov A.V.** On the use of ... // Int. J. Heat Mass Transfer, **2010**

Реконструкция-ограничитель MC+:

$$(\Delta u_i)^{\text{MC}^+} = \text{minmod} \left[ \Delta u_i, 2 \text{minmod} (\Delta u_{i-1/2}^-, \Delta u_{i+1/2}^+) \right]$$

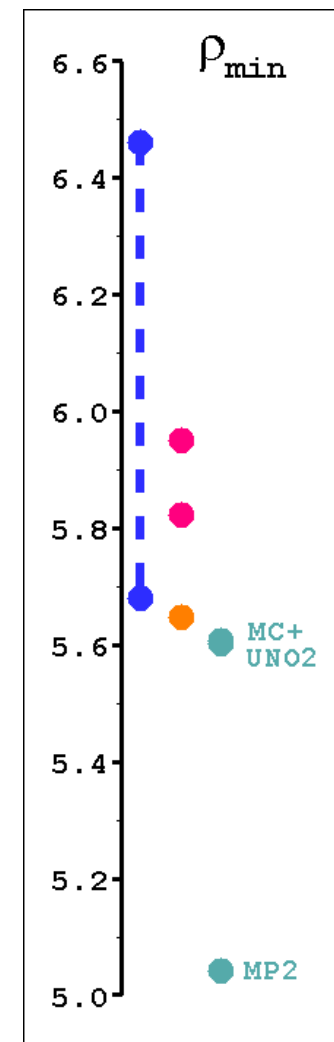
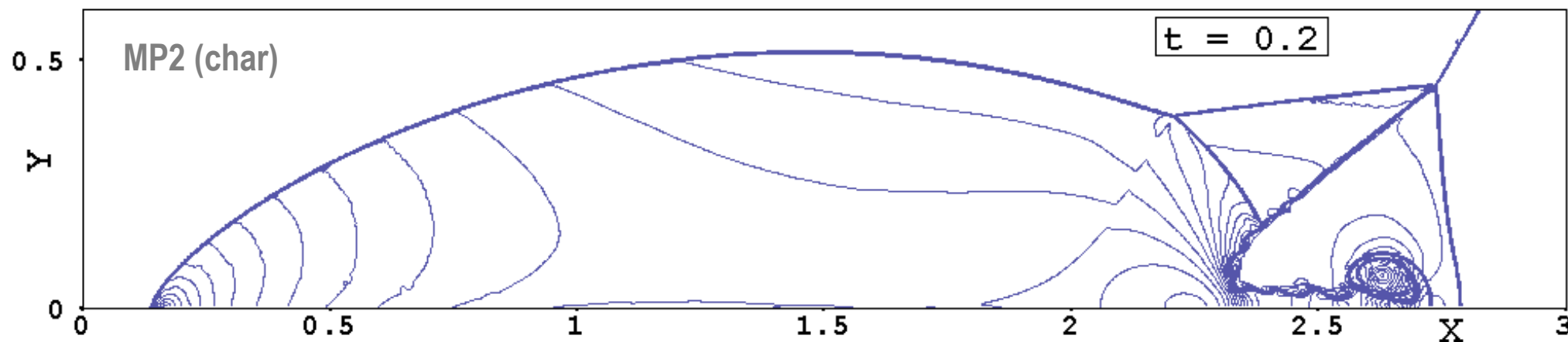
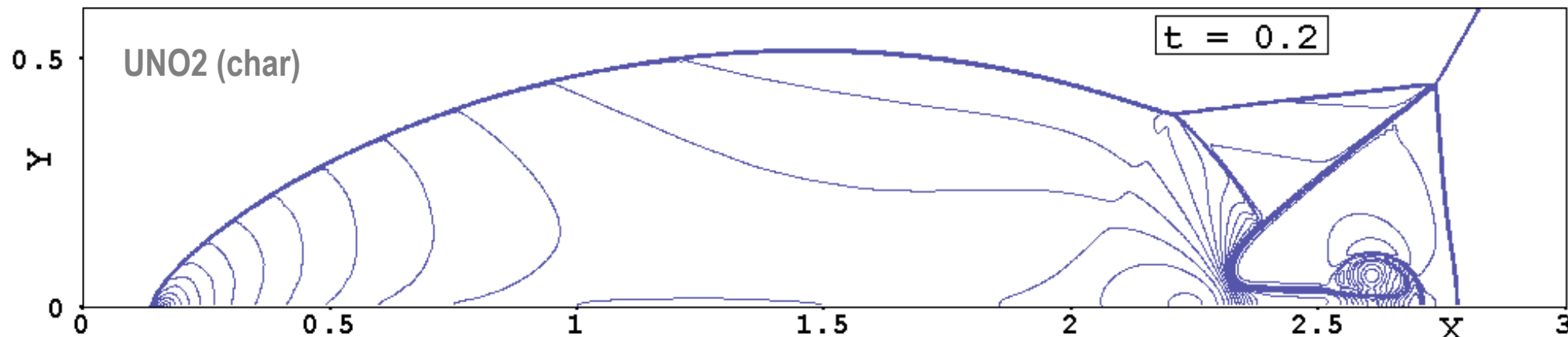
где

$$\Delta u_{i-1/2}^- = \begin{cases} \Delta u_{i-1/2}, & \text{if } \Delta u_i \Delta u_{i-1} \geq 0 \\ \Delta u_{i-1/2} - 0.5 \Delta u_{i-1}, & \text{if } \Delta u_i \Delta u_{i-1} < 0 \end{cases}$$
$$\Delta u_{i+1/2}^+ = \begin{cases} \Delta u_{i+1/2}, & \text{if } \Delta u_i \Delta u_{i+1} \geq 0 \\ \Delta u_{i+1/2} - 0.5 \Delta u_{i+1}, & \text{if } \Delta u_i \Delta u_{i+1} < 0 \end{cases}$$

# Тестовая задача о двойном маховском отражении

Результаты расчета задачи методом HR с решателем задачи Римана HLL  
на сетке с  $\Delta x = \Delta y = 1/480$

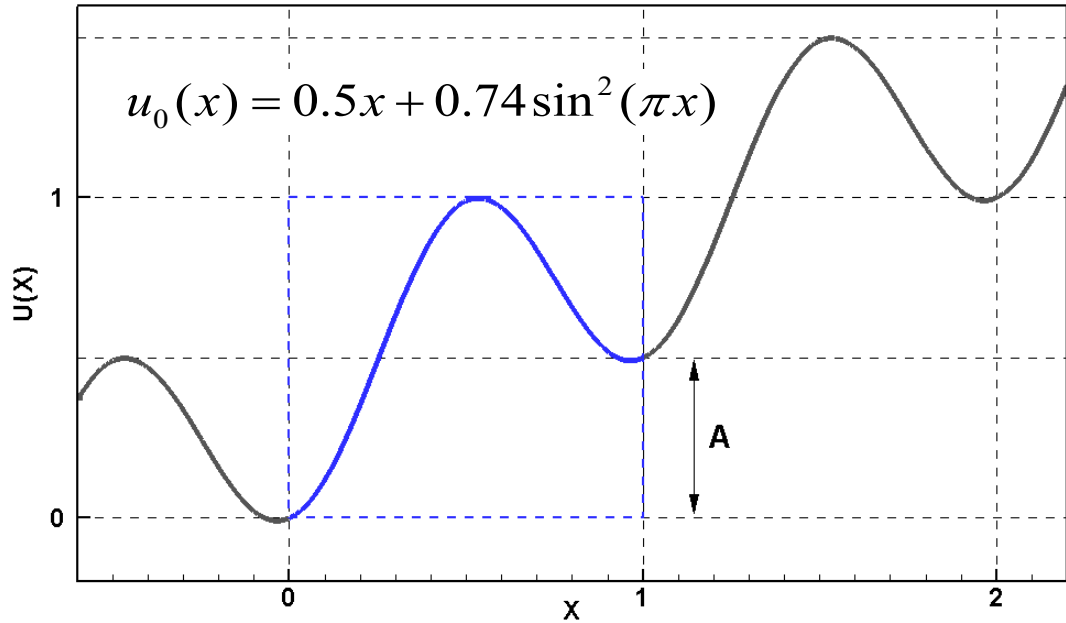
Изолинии плотности



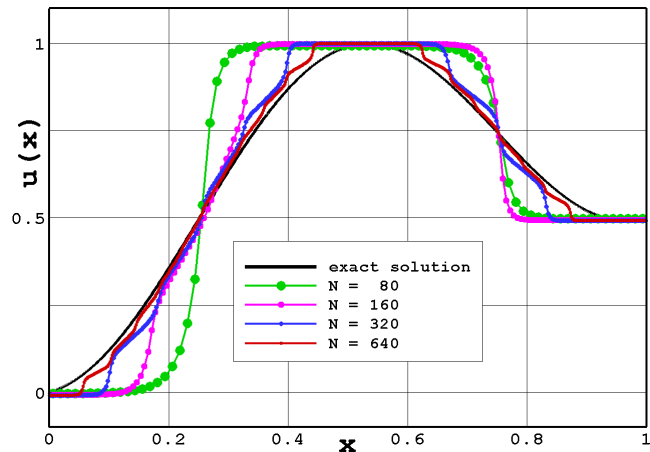
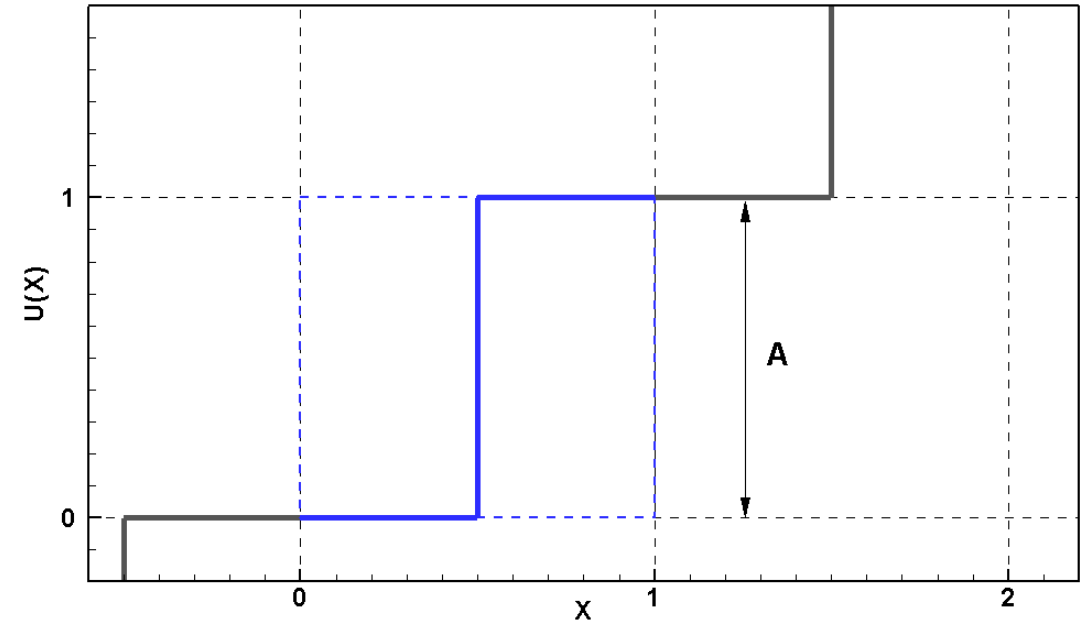
СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ

# Павел Уткин (ХПИ): вопрос №1 по решению уравнения переноса для ступенчато-периодической функции (постановка задачи)

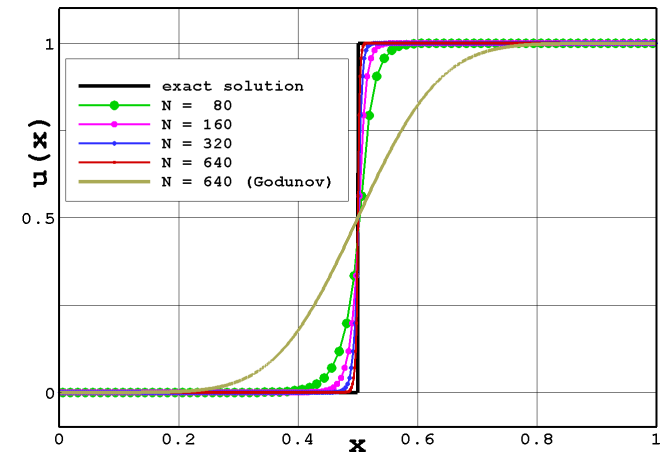
Постановка задачи для ступенчато-периодических функций  $u(x)$  с гладким профилем



с разрывом профиля

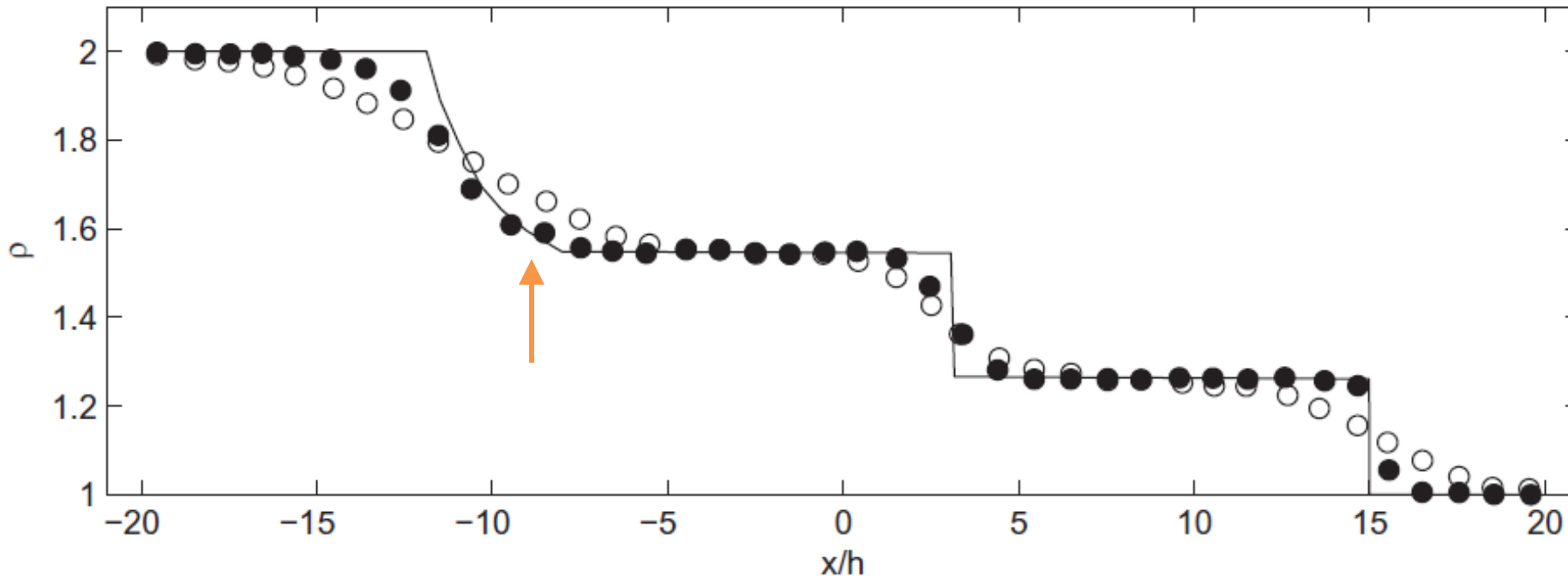


Решение задачи на момент  $t = 10$  перемещается вниз на  $\Delta u = 10 \cdot A$



# Павел Уткин (ХПИ): вопрос №2 о свойствах схемы Колгана при решении нестационарных уравнений газовой динамики

- ❑ **Колган В.П.** Применение принципа минимальных значений производных к построению конечно-разностных схем для расчета разрывных решений газовой динамики // Ученые записки ЦАГИ, **1972**
- ❑ **Kolgan V. P.** Application of the principle of minimizing the derivative to the construction of finite-difference schemes for computing discontinuous solutions of gas dynamics // J. Comp. Phys., **2011**

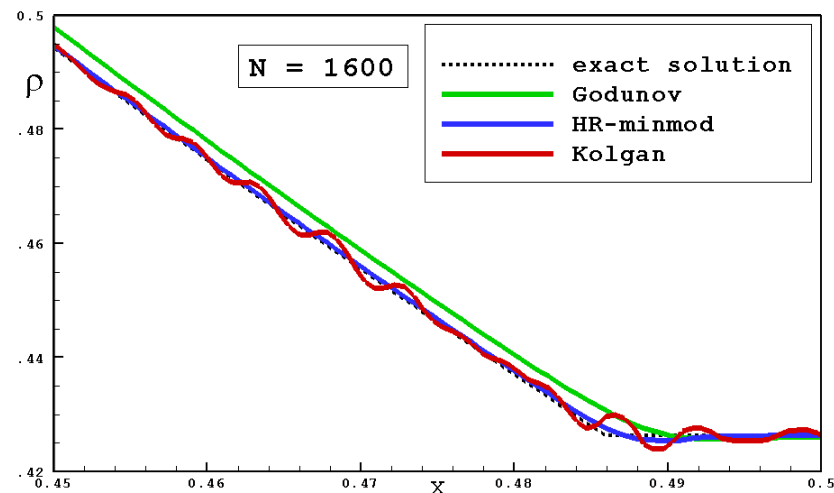
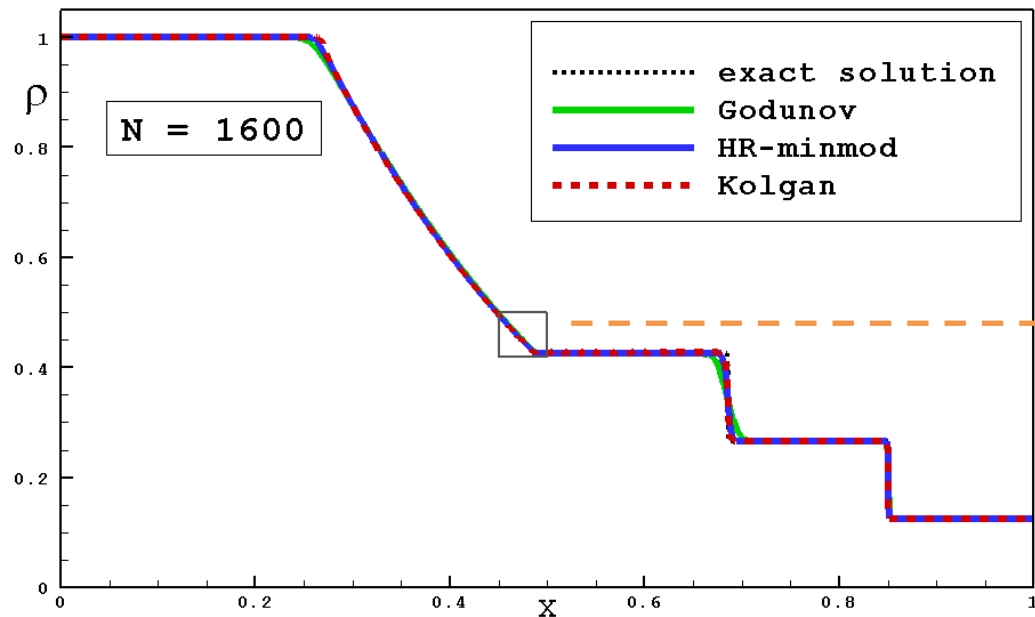
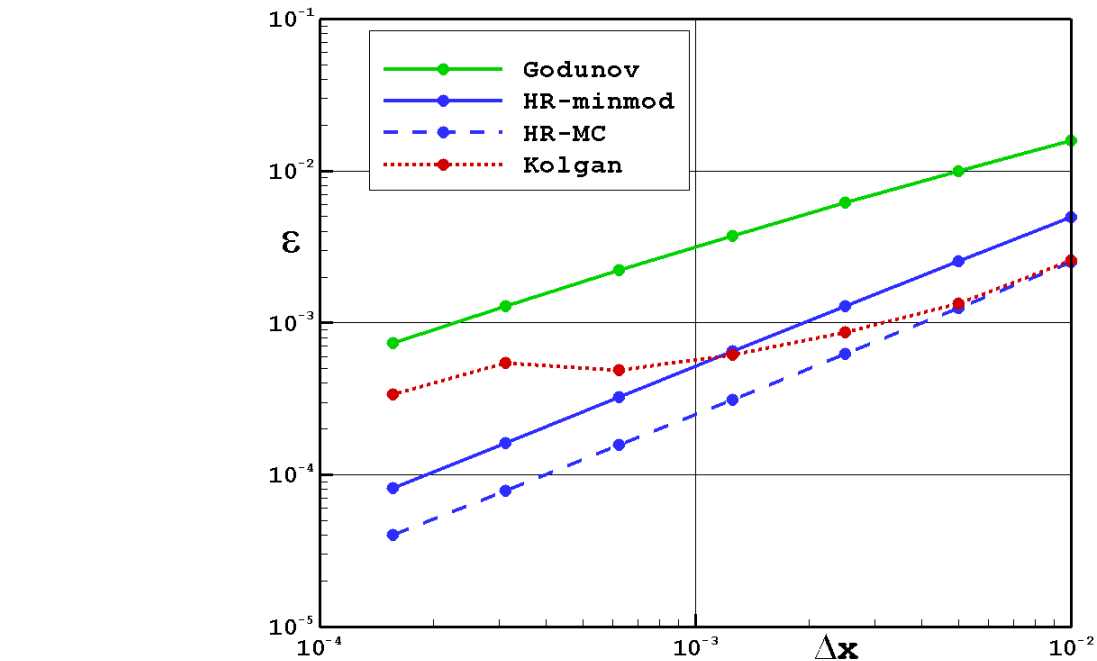
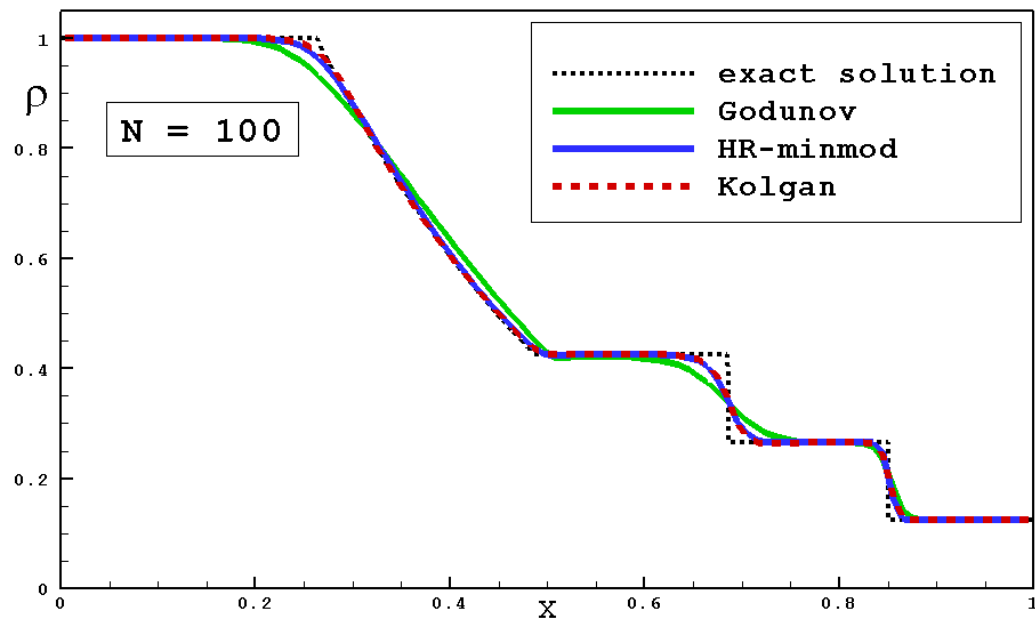


The limiter turns on and off at odd places and times for the sake of maintaining stability; its actions may show up in the form of little plateaus, steps or staircases in the numerical solution. In Figs. 1 and 2 of the Kolgan paper, showing pressure and density, respectively, of a shock-tube solution, one can clearly see a step at the head of the expansion wave.

- ❑ **van Leer B.** A historical oversight: Vladimir P. Kolgan and his high-resolution scheme // J. Comp. Phys., **2011**

# Павел Уткин (ХПИ): вопрос №2 о свойствах схемы Колгана при решении нестационарных уравнений газовой динамики

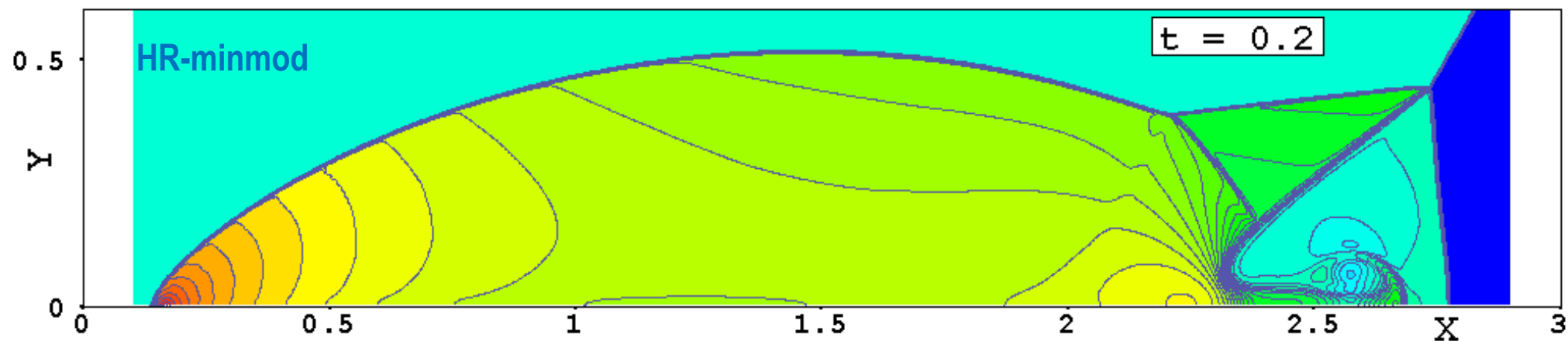
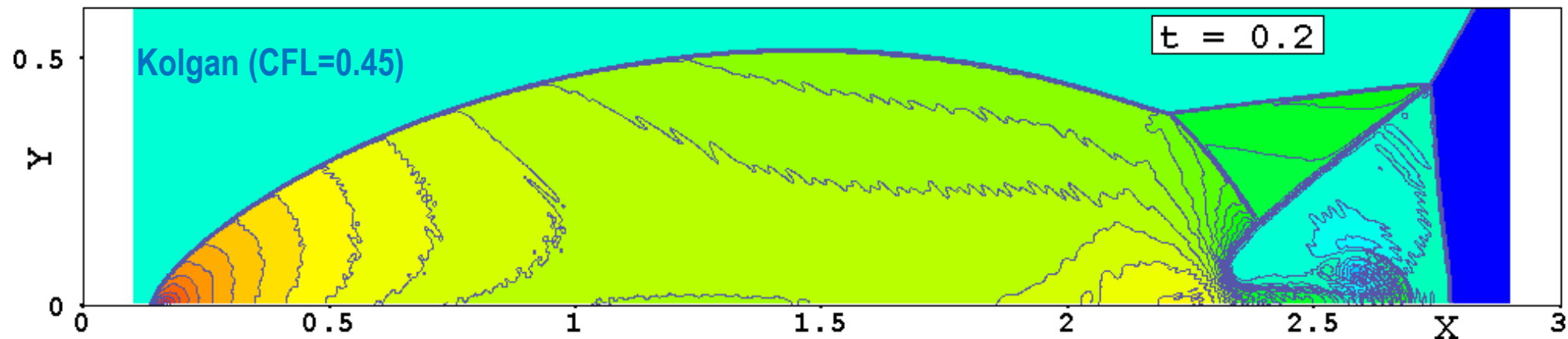
## Тестовая задача Сода



# Павел Уткин (ХПИ): вопрос №2 о свойствах схемы Колгана при решении нестационарных уравнений газовой динамики

Результаты расчета задачи на сетке с  $\Delta x = \Delta y = 1/480$   
(с решателем задачи Римана HLL)

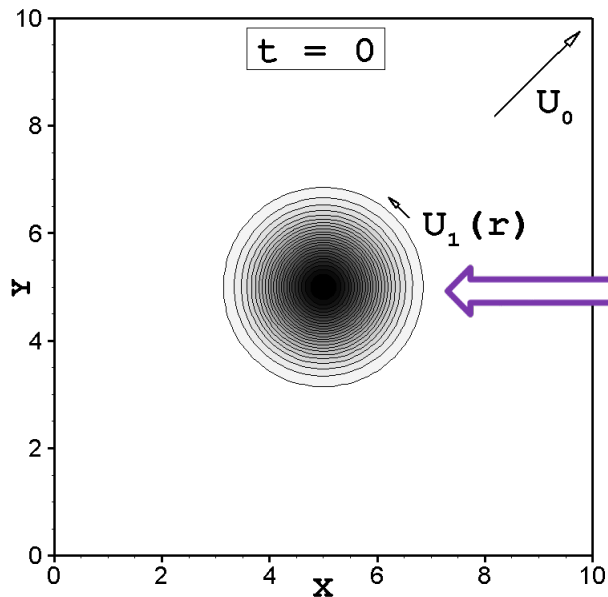
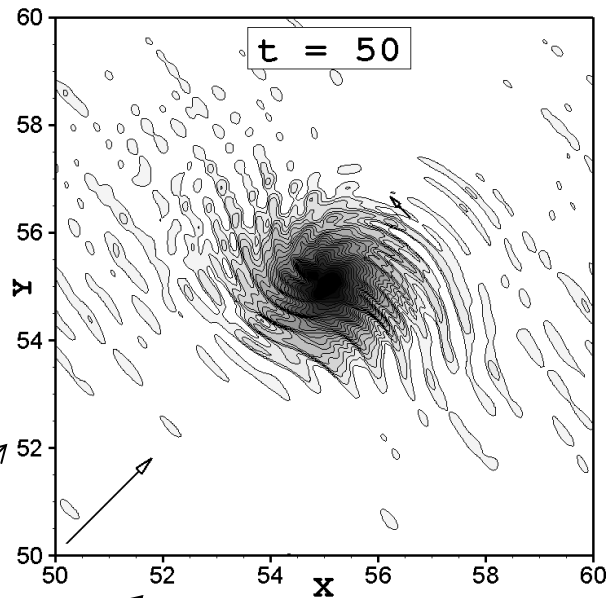
Изолинии плотности



# Павел Уткин (ХПИ): вопрос №2 о свойствах схемы Колгана при решении нестационарных уравнений газовой динамики

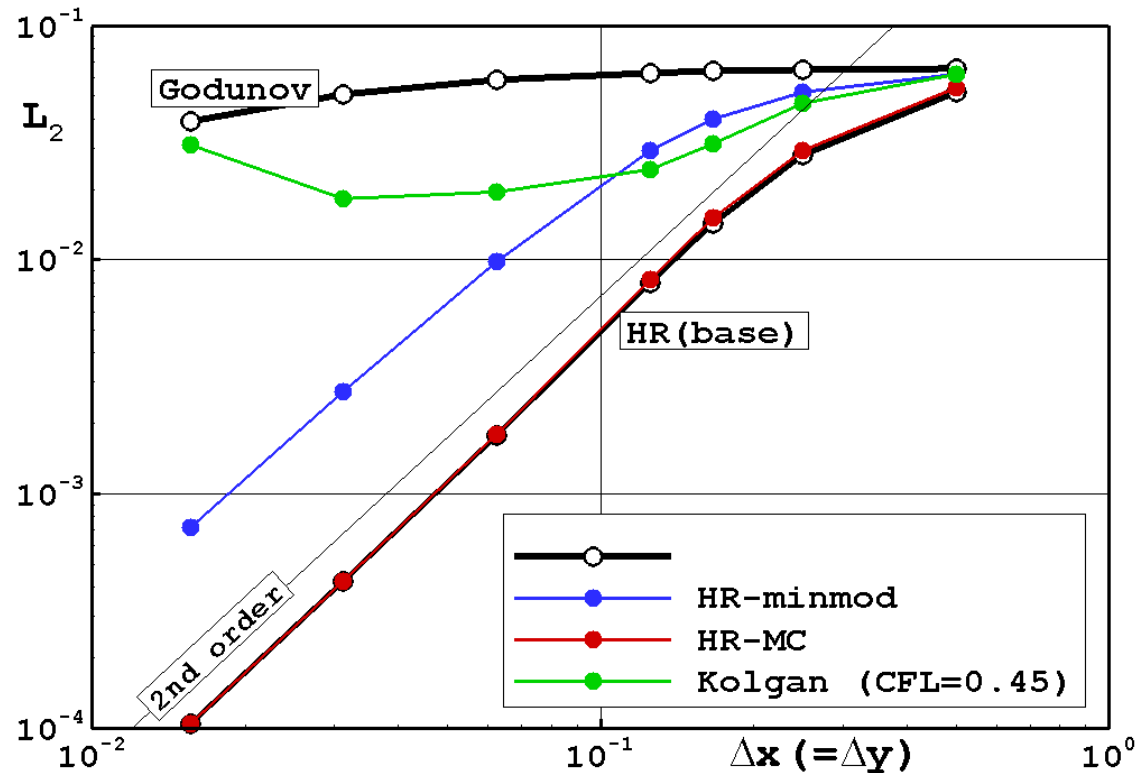
## Тестовая задача о диагональном переносе изоэнтропического вихря

Диагональный перенос  
 $U_0 = (1, 1)$



Вращение относительно центра  

$$U_1(r) = \frac{5}{2\pi} \exp\left(\frac{1-r^2}{2}\right) (-\bar{y}, \bar{x})$$



Погрешность расчета по норме  $L_2$  для различных методов в зависимости от сеточного разрешения