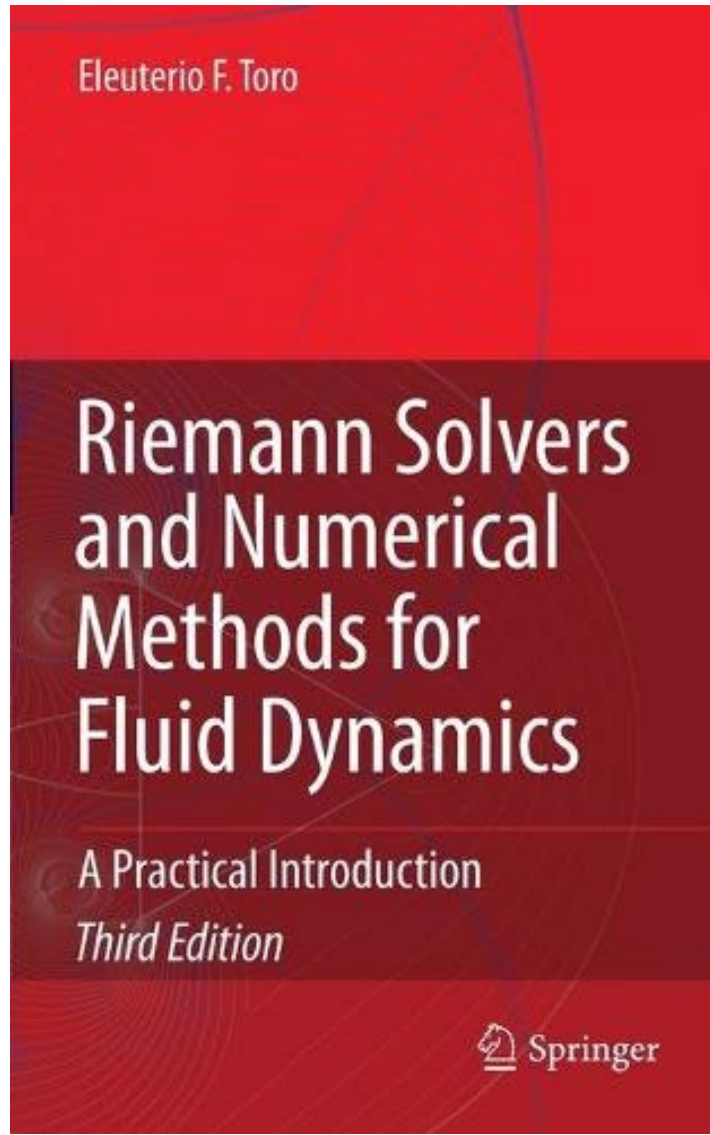


Схемы типа Годунова в вычислительной газовой динамике

VI. Решатели задачи Римана: скелеты в шкафу
(часть 1)

Родионов Александр Владимирович





1. The Equations of Fluid Dynamics
2. Notions on Hyperbolic Partial Differential Equations
3. Some Properties of the Euler Equations
4. The Riemann Problem for the Euler Equations
5. Notions on Numerical Methods
6. The Method of Godunov for Non-linear Systems
7. Random Choice and Related Methods
8. Flux Vector Splitting Methods
9. Approximate-State Riemann Solvers
10. The HLL and HLLC Riemann Solvers
11. The Riemann Solver of Roe
12. The Riemann Solver of Osher
13. High-Order and TVD Methods for Scalar Equations
14. High-Order and TVD Schemes for Non-Linear Systems
15. Splitting Schemes for PDEs with Source Terms
16. Methods for Multi-Dimensional PDEs
17. Multidimensional Test Problems
18. FORCE Fluxes in Multiple Space Dimensions
19. The Generalized Riemann Problem
20. The ADER Approach
21. Concluding Remarks

□ **Toro E.F.** Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics, 3-rd edition. Springer-Verlag, Berlin, **2009**, 724 p.

Задача Римана для уравнений газовой динамики

Уравнения Эйлера:

$$\frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{Q})}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{Q})}{\partial x} = 0, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} u \\ \rho \\ p \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho e_0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(\rho e_0 + p) \end{bmatrix}$$

\mathbf{Q} - вектор примитивных переменных,
 \mathbf{U} - вектор консервативных переменных,
 \mathbf{F} - вектор потока.

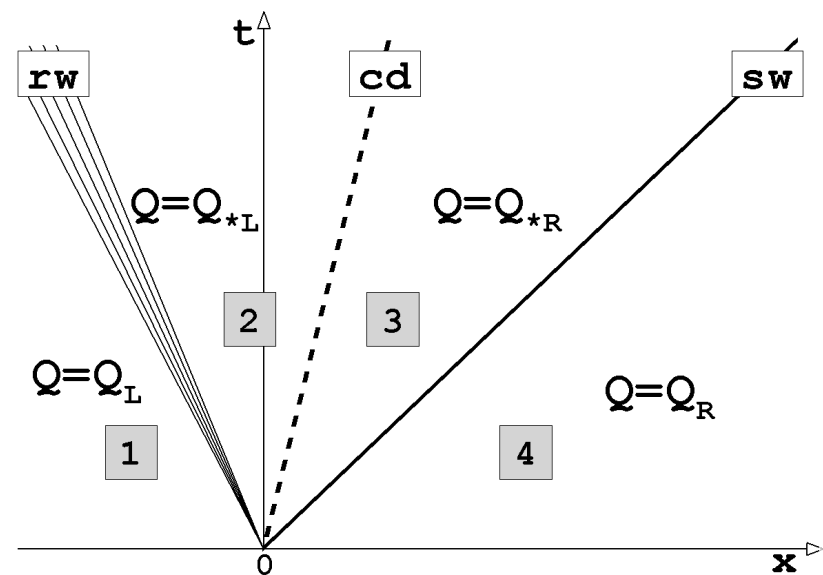
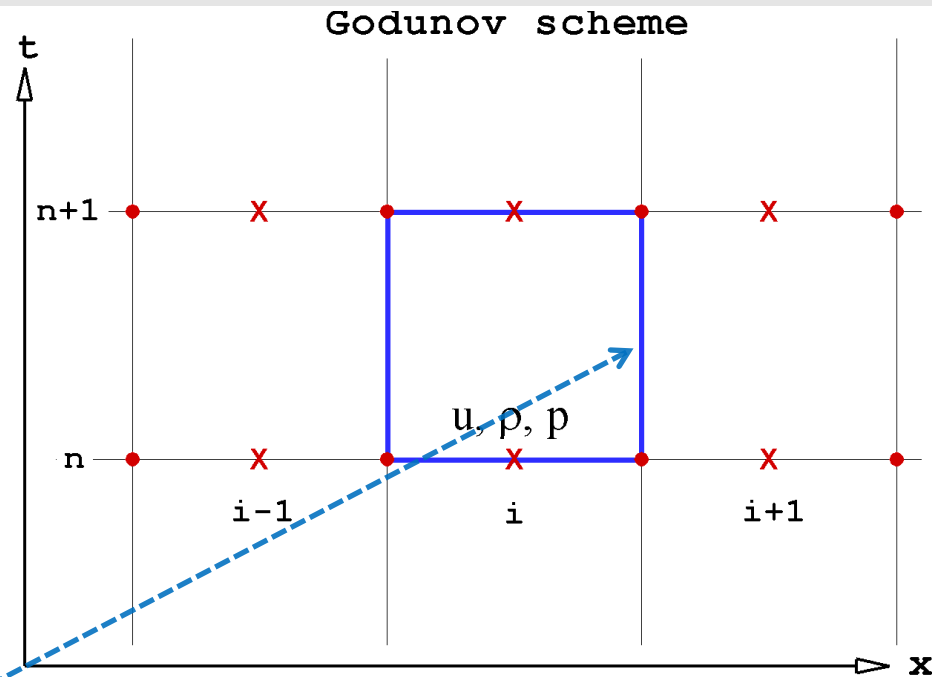
Конечно-объемная схема:

$$\frac{\mathbf{U}_i^{n+1} - \mathbf{U}_i^n}{\Delta t} + \frac{\mathbf{F}_{i+1/2} - \mathbf{F}_{i-1/2}}{\Delta x} = 0$$

Вектор потока на грани $i+1/2$: $\mathbf{F}_{i+1/2} = \mathbf{F}^{RS}(\mathbf{U}_i^n, \mathbf{U}_{i+1}^n) \equiv \mathbf{F}^{RS}(\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R)$

Схема Годунова: потоки определяются из решения задачи Римана.
 Задача Римана – задача Коши с начальным разрывом в точке $x = 0$:

$$\mathbf{Q}(x, t = 0) = \begin{cases} \mathbf{Q}_L, & \text{если } x < 0, \\ \mathbf{Q}_R, & \text{если } x > 0. \end{cases} \quad \text{alt.: } \mathbf{U}(x, t = 0) = \begin{cases} \mathbf{U}_L, & \text{если } x < 0, \\ \mathbf{U}_R, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

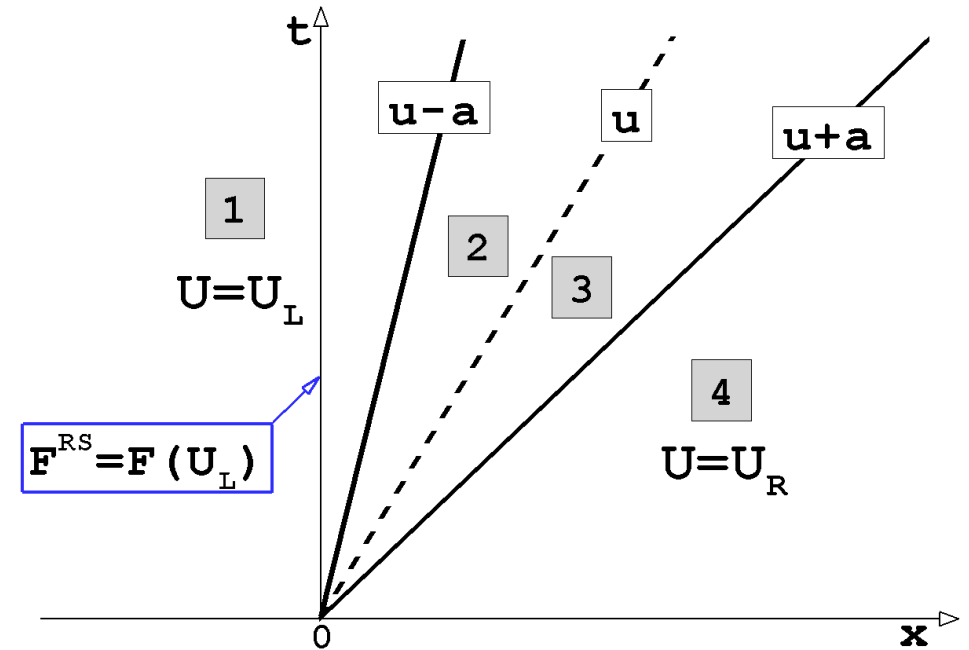


Общие свойства приближенных решателей задачи Римана

I. Противопоточность (противопотоковость) схемы

В случае сверхзвукового течения:

$$\mathbf{F}^{RS}(\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R) = \begin{cases} \mathbf{F}(\mathbf{U}_L), & \text{если } u > a, \\ \mathbf{F}(\mathbf{U}_R), & \text{если } u < -a. \end{cases}$$



Следствие: функция $F^{RS}(\mathbf{U}_R, \mathbf{U}_L)$ не обладает свойством коммутативности, т.е. $F^{RS}(\mathbf{U}_R, \mathbf{U}_L) \neq F^{RS}(\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R)$.

Пример: функция $F(\mathbf{U}_R, \mathbf{U}_L) = 0.5 \cdot [F(\mathbf{U}_L) + F(\mathbf{U}_R)]$ не обеспечивает свойство сохранения монотонности решения (в линейном случае) и не сочетается с первым порядком аппроксимации по времени (второй порядок по пространству \rightarrow неустойчивость схемы).

Общие свойства приближенных решателей задачи Римана

II. Соответствие точному решателю схемы Годунова в линейном приближении (интенсивность начального разрыва невелика)

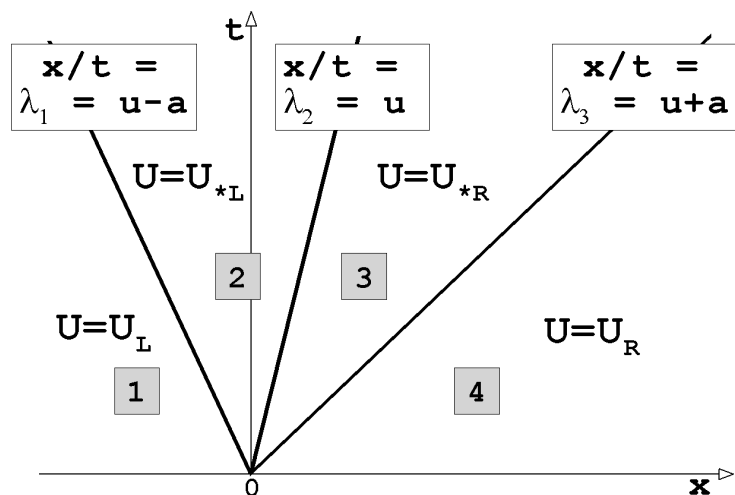
В случае решения линейного уравнения переноса: $\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0, \quad f = au.$

$$f(u_L, u_R) = \begin{cases} au_L, & \text{если } a > 0, \\ au_R, & \text{если } a < 0. \end{cases} \Rightarrow f(u_L, u_R) = 0.5 \cdot (a + |a|)u_L + 0.5 \cdot (a - |a|)u_R$$

$$f(u_L, u_R) = 0.5[f(u_L) + f(u_R)] - 0.5|a|(u_R - u_L)$$

В случае решения уравнений Эйлера в линейном приближении:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0, \quad \mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}}.$$



- собственные значения матрицы \mathbf{A} : $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

- правые собственные вектора матрицы \mathbf{A} : $\mathbf{K}^{(1)}, \mathbf{K}^{(2)}, \mathbf{K}^{(3)}$.

- проекция разности \mathbf{U} на \mathbf{K} : $\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \mathbf{K}^{(i)}$.

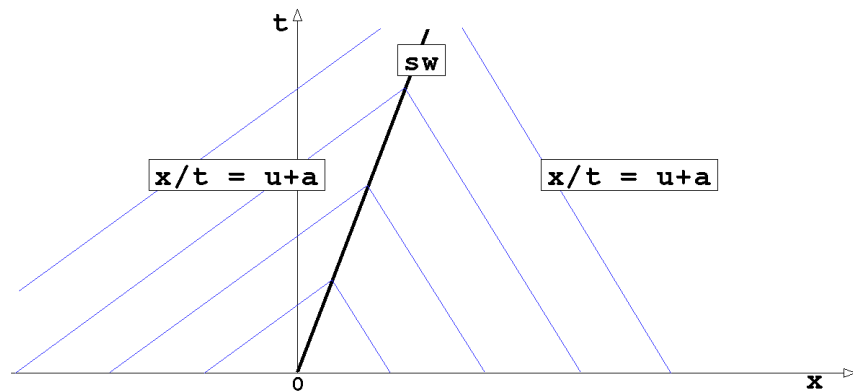
$$\mathbf{F}^{RS}(\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R) = 0.5[\mathbf{F}(\mathbf{U}_L) + \mathbf{F}(\mathbf{U}_R)] - 0.5 \sum_{i=1}^3 |\lambda_i| \alpha_i \mathbf{K}^{(i)}$$

Общие свойства приближенных решателей задачи Римана

III. Соответствие точному решателю схемы Годунова в случае расчета одиночных разрывов: скачков уплотнения и контактных поверхностей

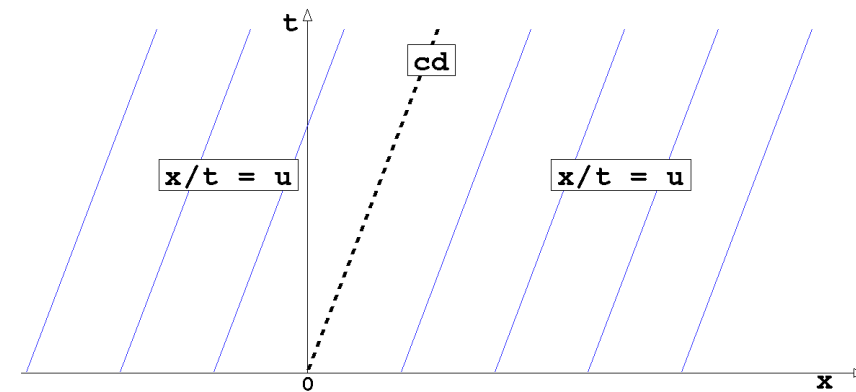
Поверхности разрыва в газовой динамике:

ударная волна



Размывание ударной волны: $\frac{D}{\Delta x} \approx const$

контактная поверхность



Размывание контактной поверхности: $\frac{D}{\Delta x} \sim n^{1/2} \sim \left(\frac{t}{\Delta x}\right)^{1/2}$

Свойство схемы Годунова: в случае, когда разрыв неподвижен относительно сетки (в плоскости xt он ориентирован строго вертикально) его размывания не происходит.

□ **Roe P. L.** Approximate Riemann solvers, parameter vectors and difference schemes // J. Comp. Phys., **1981**

Roe solver

WIKIPEDIA
The Free Encyclopedia

The **Roe approximate Riemann solver**, devised by Phil Roe, is an approximate Riemann solver based on the Godunov scheme and involves finding an estimate for the intercell numerical flux or Godunov flux $\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}$ at the interface between two computational cells \mathbf{U}_i and \mathbf{U}_{i+1} , on some discretised space-time computational domain.

Уравнений Эйлера записываются в квазилинейном виде $\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \tilde{\mathbf{A}} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0,$

в котором матрица $\tilde{\mathbf{A}}$ обеспечивает выполнение условия $\mathbf{F}(\mathbf{U}_R) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_L) = \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L).$

• собственные значения и собственные вектора матрицы $\tilde{\mathbf{A}}$ выражаются через осредненные величины (скорость, полная энтальпия и скорость звука):

$$\tilde{u} = \frac{\sqrt{\rho_L} u_L + \sqrt{\rho_R} u_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}, \quad \tilde{H} = \frac{\sqrt{\rho_L} H_L + \sqrt{\rho_R} H_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}},$$

$$\tilde{a} = \sqrt{(\gamma - 1) \left(\tilde{H} - \tilde{u}^2 / 2 \right)}.$$

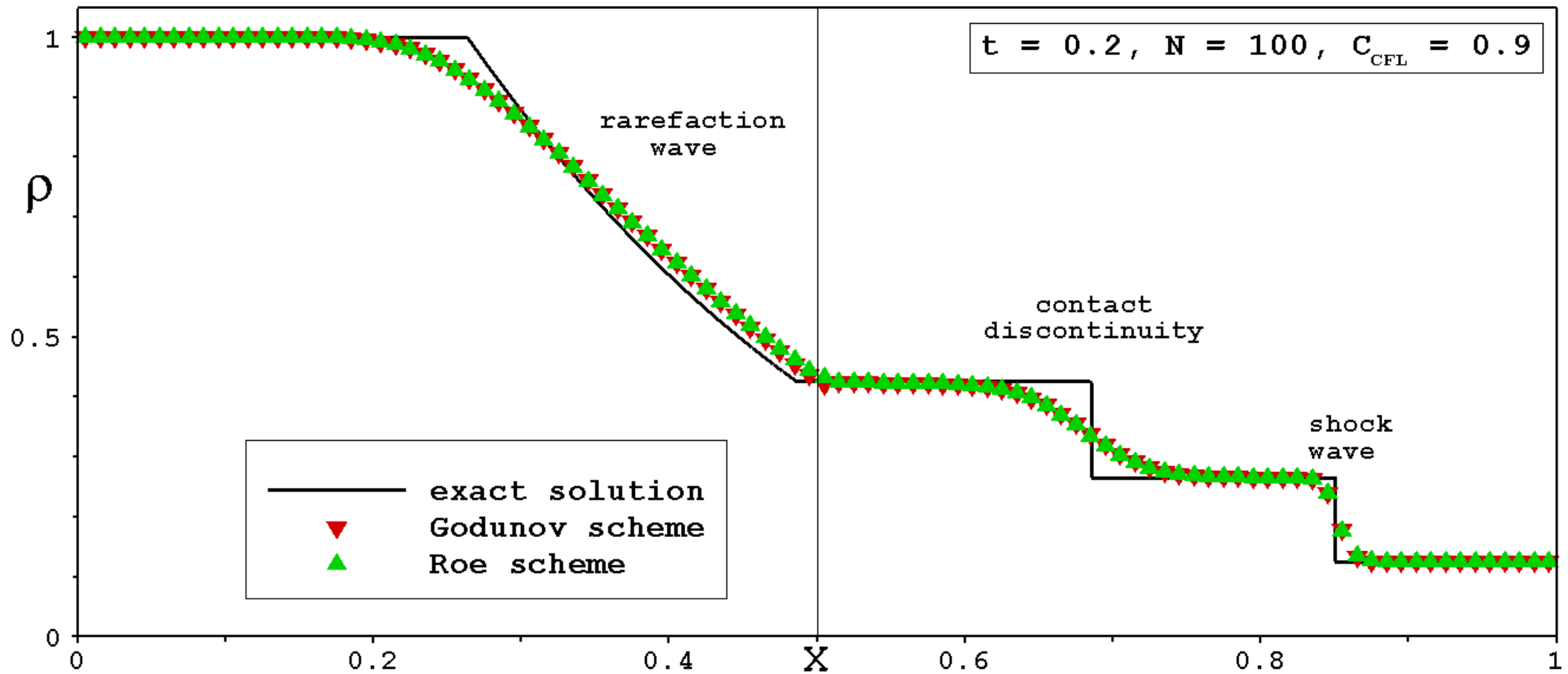
$$\mathbf{F}^{RS}(\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R) = 0.5 [\mathbf{F}(\mathbf{U}_L) + \mathbf{F}(\mathbf{U}_R)] - 0.5 \sum_{i=1}^3 |\tilde{\lambda}_i| \tilde{\alpha}_i \tilde{\mathbf{K}}^{(i)}$$

Решатель (схема) Роу

Тестовая задача Сода (Sod's test problem)

Начальные данные ($t = 0$) в области $x < 0.5$: $u = 0$, $\rho = 1$, $p = 1$;

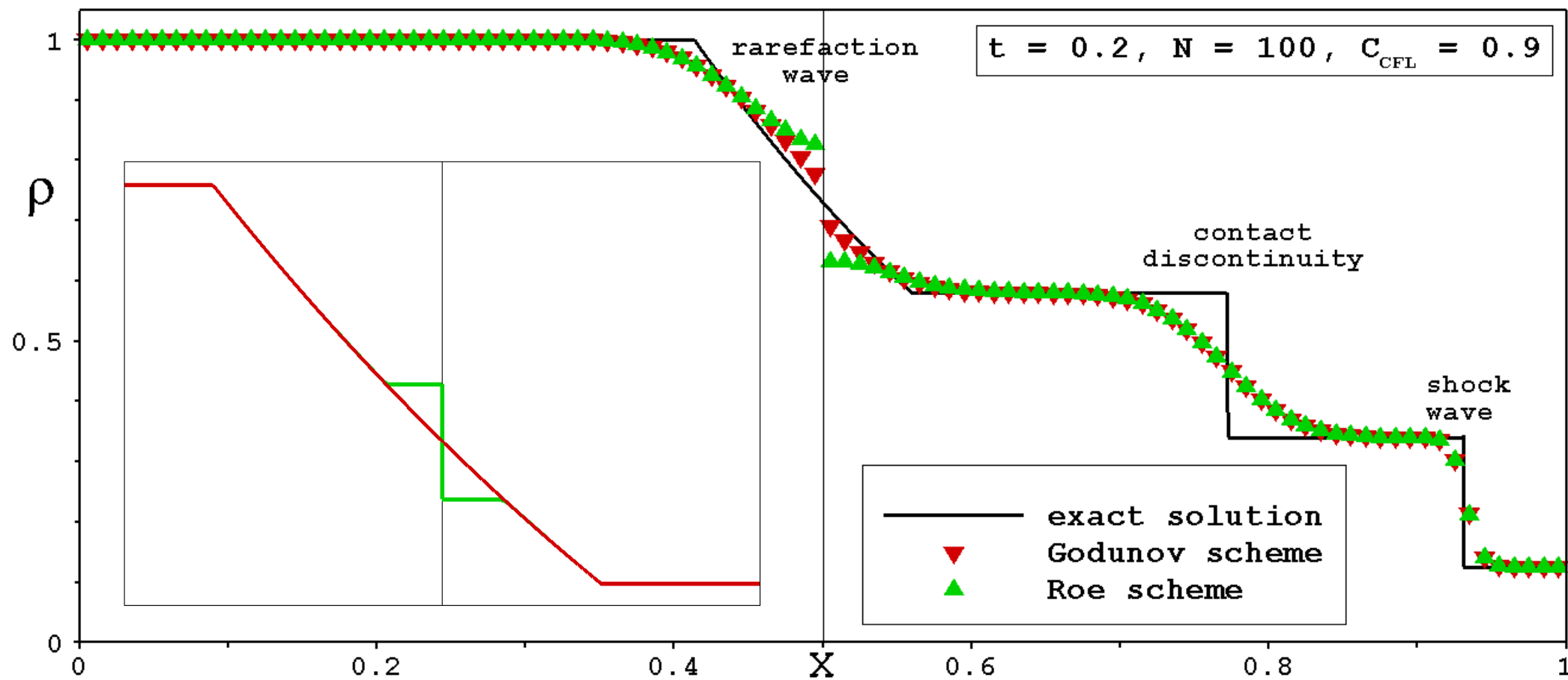
в области $x > 0.5$: $u = 0$, $\rho = 1/8$, $p = 1/10$.



Решатель (схема) Роу

Модифицированная задача Суда

Начальные данные ($t = 0$) в области $x < 0.5$: $u = 0.75$, $\rho = 1$, $p = 1$;
в области $x > 0.5$: $u = 0$, $\rho = 1/8$, $p = 1/10$.

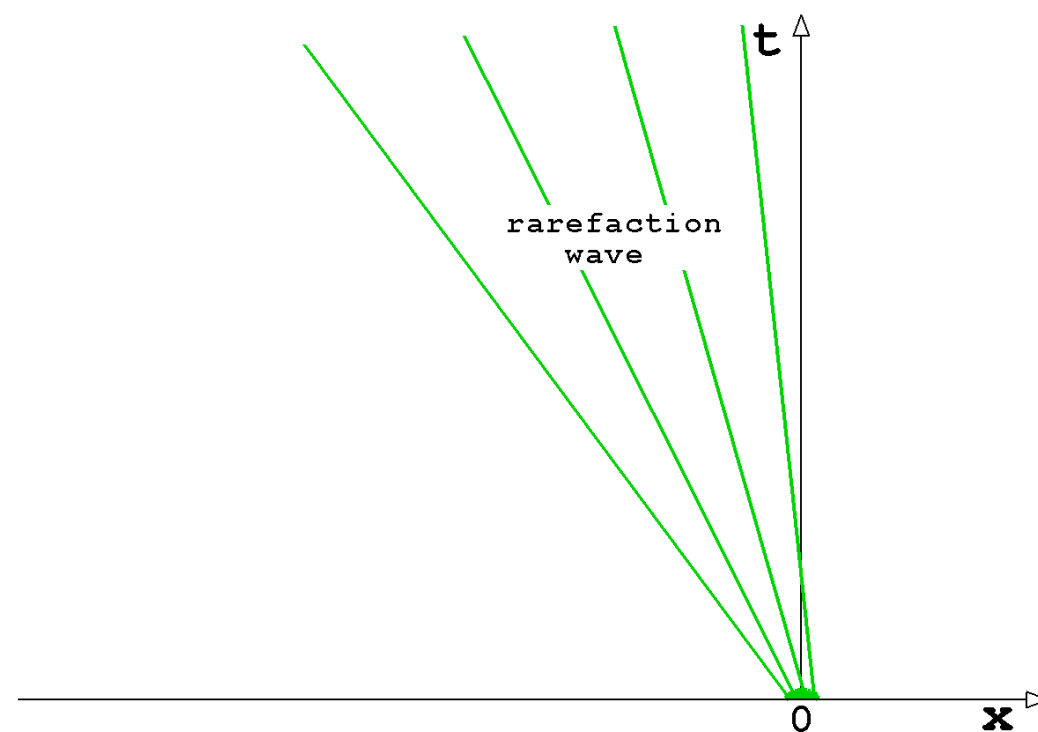
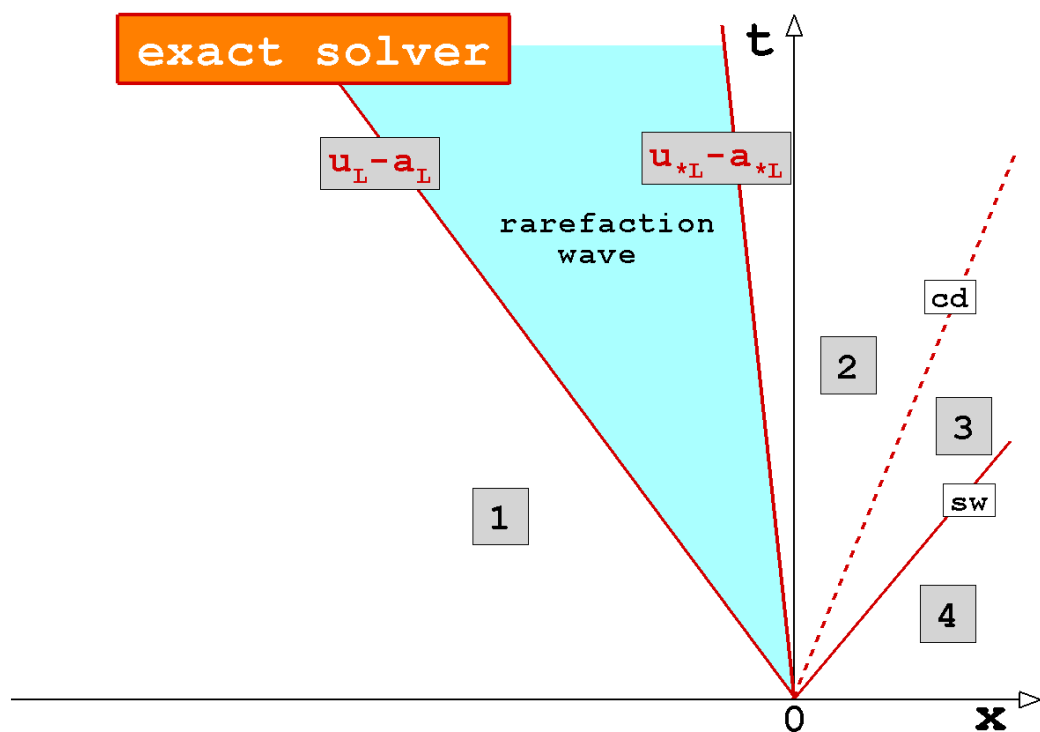


Решатель (схема) Роу

Скачки разрежения и энтропийная коррекция (entropy fix)

Соотношение на скачке уплотнения: $F(\mathbf{U}_R) - F(\mathbf{U}_L) = S(\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L)$

Соотношение на скачке разрежения: $F(\mathbf{U}_L) - F(\mathbf{U}_R) = S(\mathbf{U}_L - \mathbf{U}_R)$



Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // J. Comp. Phys., v.49, **1983**

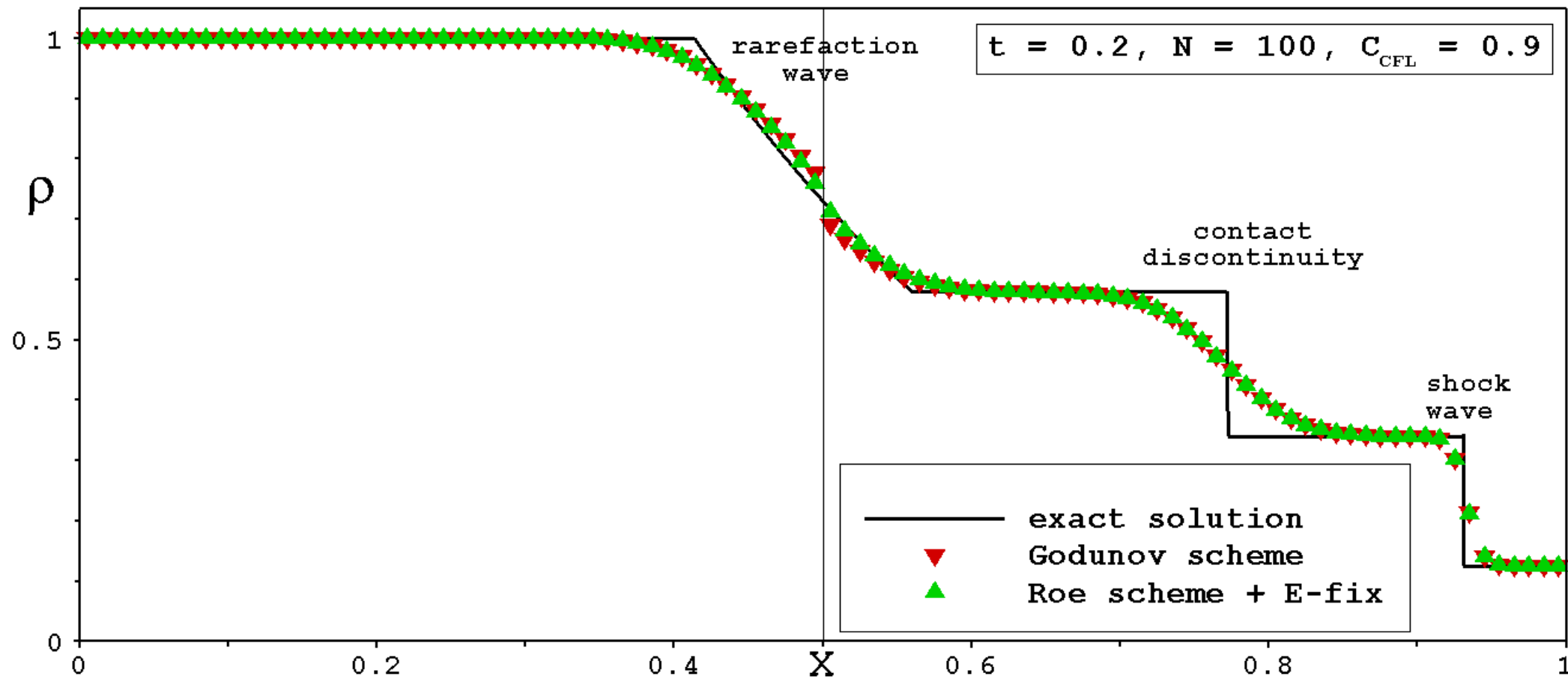
Harten A., Hyman J.M. Self adjusting grid methods for one-dimensional hyperbolic ... // J. Comp. Phys., v. 50, **1983**

Решатель (схема) Роу

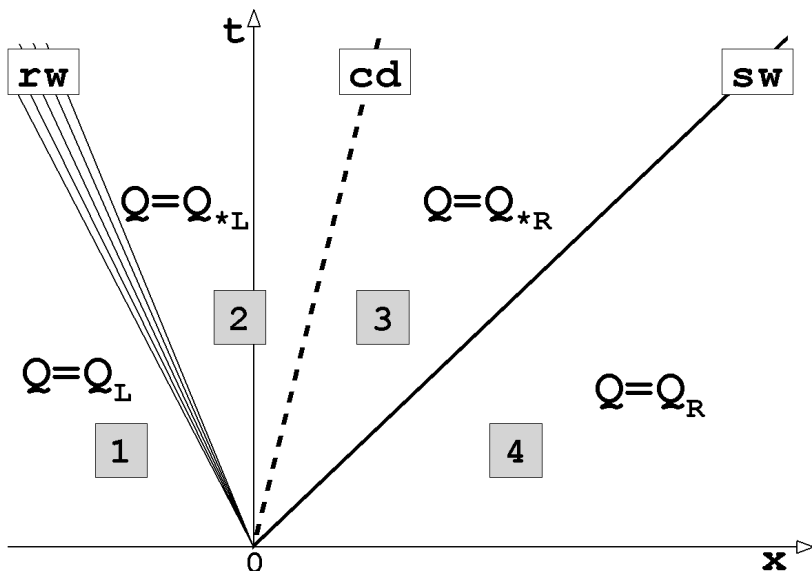
Модифицированная задача Суда

Начальные данные ($t = 0$) в области $x < 0.5$: $u = 0.75$, $\rho = 1$, $p = 1$;

в области $x > 0.5$: $u = 0$, $\rho = 1/8$, $p = 1/10$.



Решатель (схема) HLL



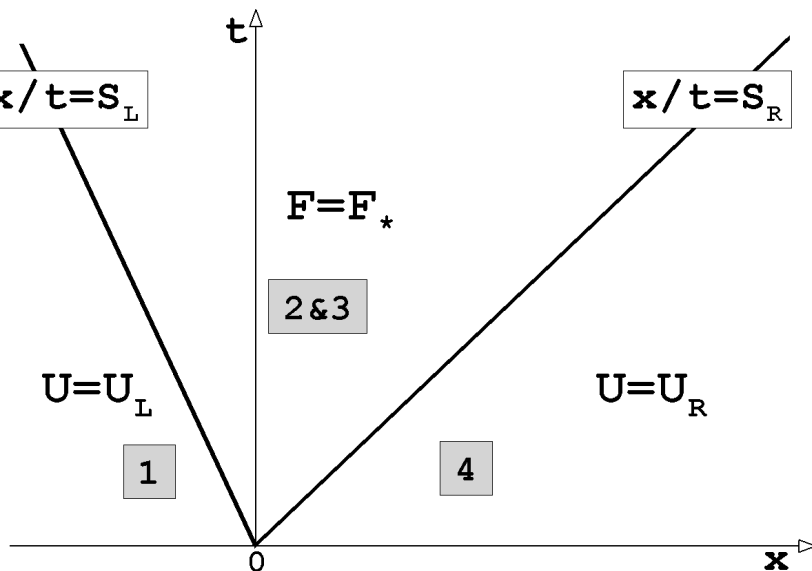
Точный решатель задачи Римана

Разрыв распадается на три волны: две акустические волны (каждая из которых может быть либо ударной волной, либо волной разрежения) и контактный разрыв.

Решатель Рoу

Разрыв также распадается на три волны, но волна разрежения заменяется скачком разрежения.

□ **Harten A., Lax P. D., van Leer B.** On upstream differencing and Godunov-type schemes for ... // SIAM Review, **1983**



Решатель HLL

Разрыв распадается на две волны, скорости которых (S_R и S_L) известны (вычислены заранее). Контактный разрыв отсутствует.

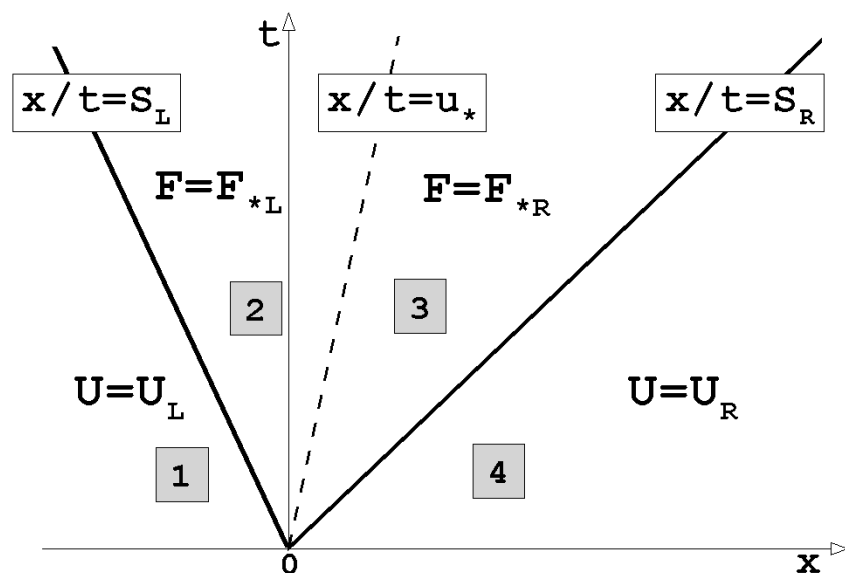
Соотношения на правом и левом разрывах: $F_R - F_* = S_R (U_R - U_*)$

$$F_* = \frac{S_R F_L - S_L F_R + S_R S_L (U_R - U_L)}{S_R - S_L}$$

$$F_* - F_L = S_L (U_* - U_L)$$

Решатель (схема) HLLC

- Toto E.F., Spruce M., Speares W.** Restoration of the contact surface in the HLL–Riemann solver // Technical Report CoA–9204, College of Aeronautics, Cranfield Institute of Technology, UK, **1992** ; Shock Waves, **1994**



Решатель HLLC (С - contact)

В структуру решателя HLL добавляется контактный разрыв.

Соотношения на правом и левом разрывах: $\mathbf{F}_R - \mathbf{F}_{*R} = S_R (\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_{*R})$

$$\mathbf{F}_{*L} - \mathbf{F}_L = S_L (\mathbf{U}_{*L} - \mathbf{U}_L)$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho e_0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(\rho e_0 + p) \end{bmatrix}, \quad e_0 = \frac{u^2}{2} + e(p, \rho)$$

$$\begin{aligned} u_{*R} &= u_{*L} \equiv u_* \\ p_{*R} &= p_{*L} \equiv p_* \\ \rho_{*R}, \rho_{*L} \\ (e_0)_{*R}, (e_0)_{*L} \end{aligned}$$

Потоки массы через правый и левый разрывы: $m_R = \rho_R (S_R - u_R)$, $m_L = \rho_L (u_L - S_L)$.

$$u_* = \frac{u_L m_L + u_R m_R + p_L - p_R}{m_L + m_R}, \quad p_* = \frac{p_L m_R + p_R m_L + m_L m_R (u_L - u_R)}{m_L + m_R}, \quad \rho_{*R} = m_R / (S_R - u_*), \quad \rho_{*L} = m_L / (u_* - S_L),$$

$$(e_0)_{*R} = (e_0)_R - (p_R u_R - p_* u_*) / m_R, \quad (e_0)_{*L} = (e_0)_L + (p_L u_L - p_* u_*) / m_L.$$

- Сафронов А.В.** Разностный метод решения нестационарных уравнений газодинамики на основе соотношений на разрывах // Космонавтика и ракетостроение, вып. 2(43), **2006**

Решатель (схема) HLLC

Способы расчета скоростей распространения возмущений вправо и влево от разрыва (S_R и S_L)

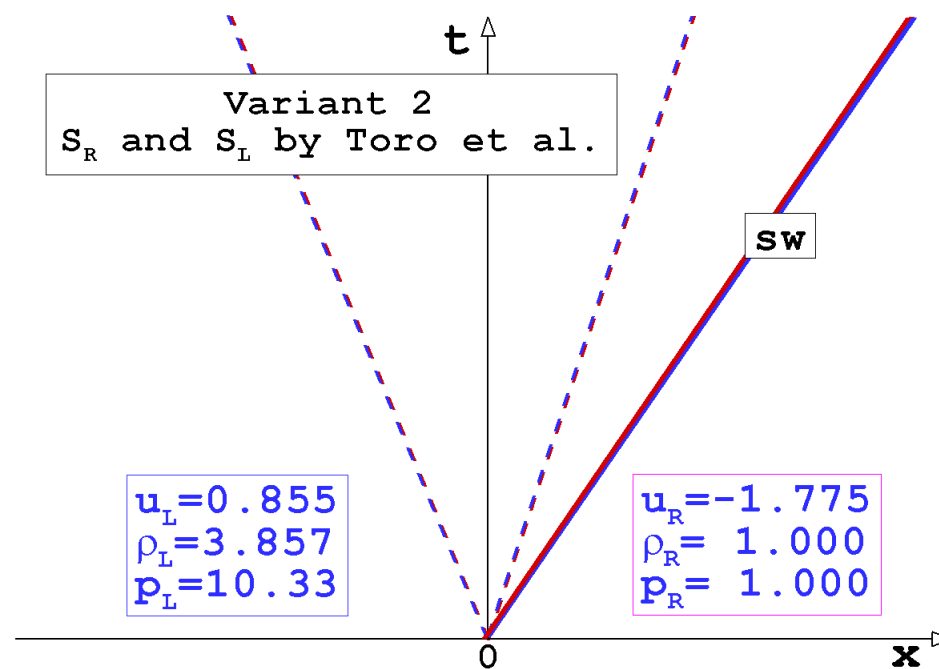
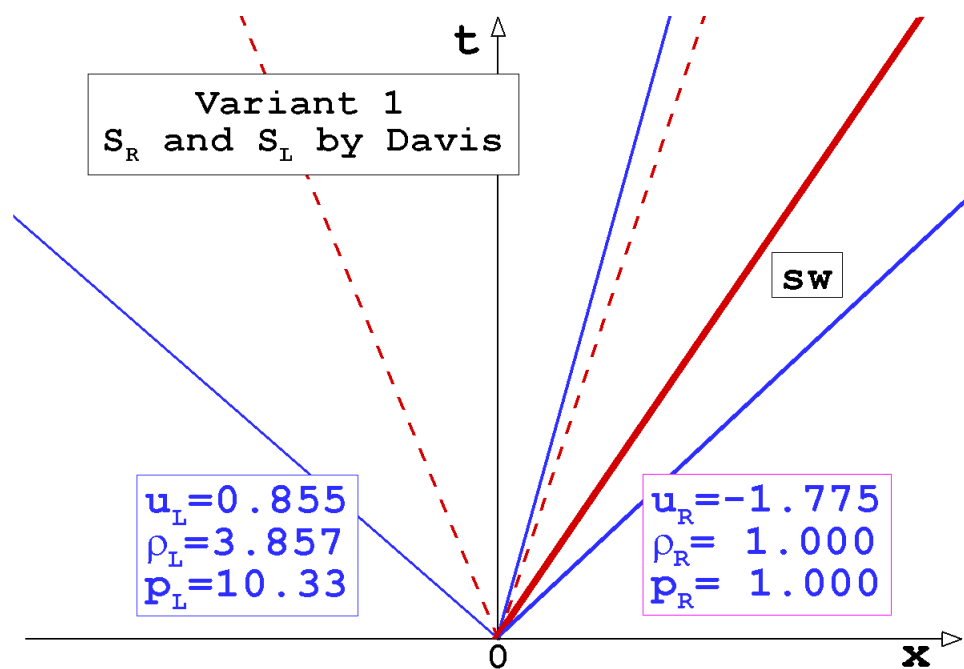
- **Davis S.F.** Simplified second-order Godunov-type methods, SIAM J. Sci. Stat. Comput. 9(3), **1988**

Вариант 1: $S_L = \min\{u_L - a_L, u_R - a_R\}, \quad S_R = \max\{u_L + a_L, u_R + a_R\}.$

- **Toro E.F., Spruce M., Speares W.** Restoration of the contact surface in the HLL-Riemann solver // Shock Waves, **1994**

Вариант 2: $S_L = u_L - q_L a_L, \quad S_R = u_R + q_R a_R, \quad q_L = f(\hat{p}_* / p_L, \gamma), \quad q_R = f(\hat{p}_* / p_R, \gamma).$

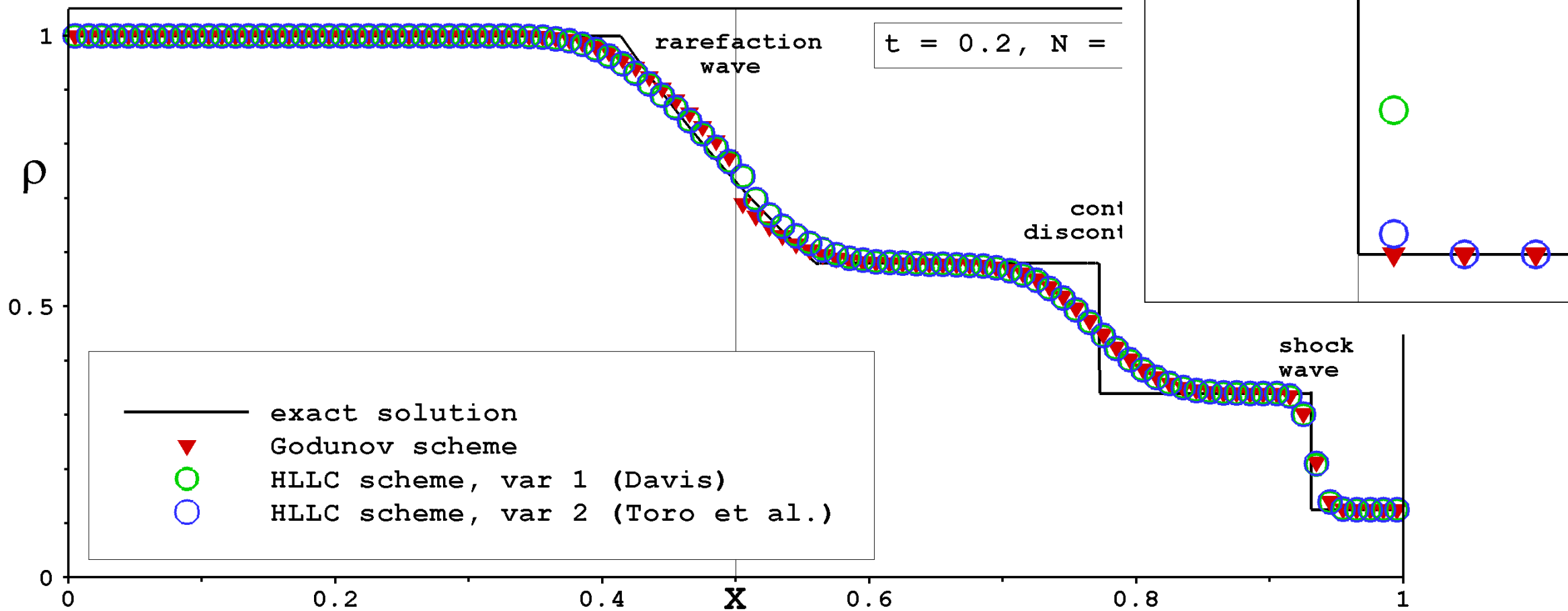
Соответствие точному решателю схемы Годунова при расчете одиночной ударной волны



Решатель (схема) HLLC

Модифицированная задача Суда

Начальные данные ($t = 0$) в области $x < 0.5$: $u = 0.75$, $\rho = 1$
в области $x > 0.5$: $u = 0$, $\rho = 0.5$



конец первой части

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ