

Схемы типа Годунова в вычислительной газовой динамике

VII. Решатели задачи Римана: скелеты в шкафу
(часть 2)

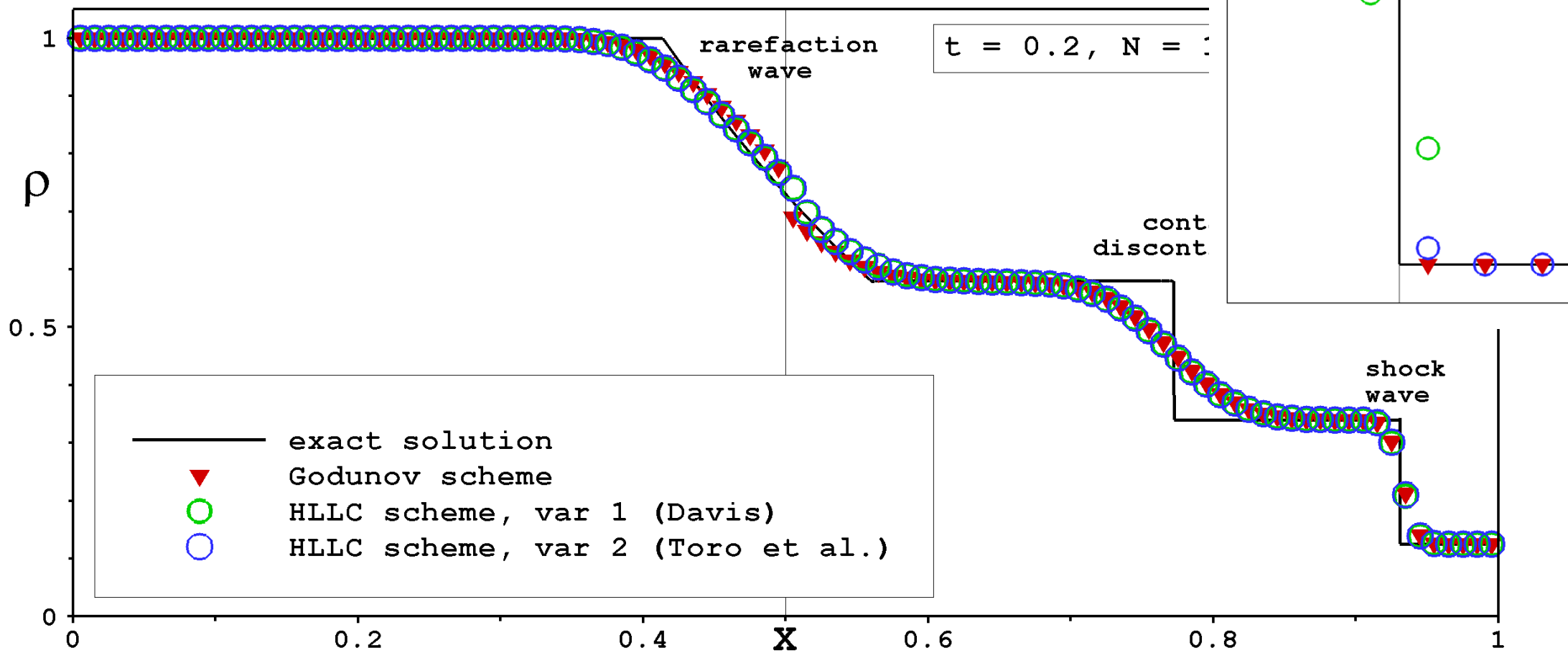
Родионов Александр Владимирович



Решатель (схема) HLLC

Модифицированная задача Суда

Начальные данные ($t = 0$) в области $x < 0.5$: $u = 0.75$, $\rho = 1$
в области $x > 0.5$: $u = 0$, $\rho = 1$



Вариант 1: $S_L = \min \{u_L - a_L, u_R - a_R\}, \quad S_R = \max \{u_L + a_L, u_R + a_R\}.$

Вариант 2: $S_L = u_L - q_L a_L, \quad S_R = u_R + q_R a_R, \quad q_L = f(\hat{p}_* / p_L, \gamma), \quad q_R = f(\hat{p}_* / p_R, \gamma).$

Решатель (схема) HLLC

“left” test

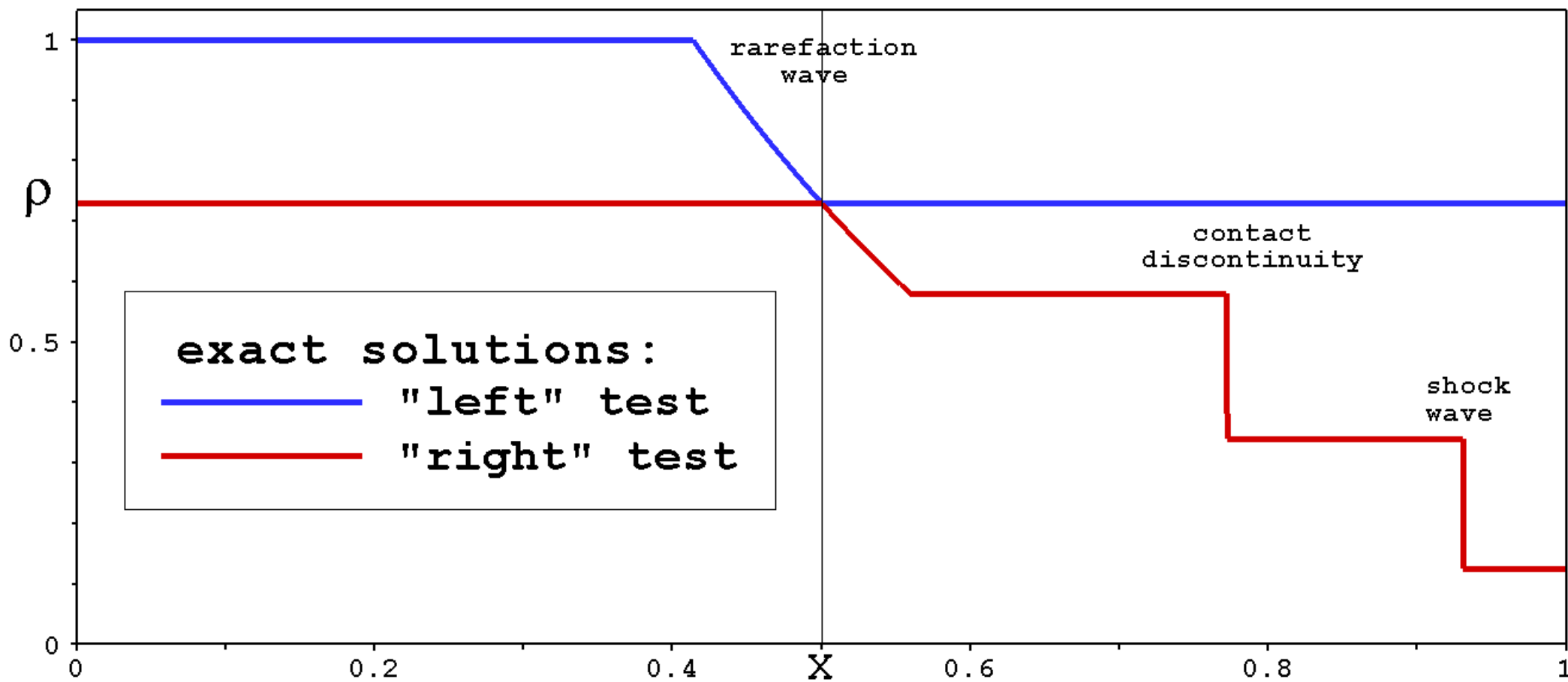
“right” test

Начальные данные, $x < 0.5$: $u = 0.75, \rho = 1, p = 1$

$x > 0.5$: $u = 1.1110, \rho = 0.72992, p = 0.64355$

$u = 1.1110, \rho = 0.72992, p = 0.64355$

$u = 0, \rho = 1/8, p = 1/10$



Решатель (схема) HLLC

"left" test

"right" test

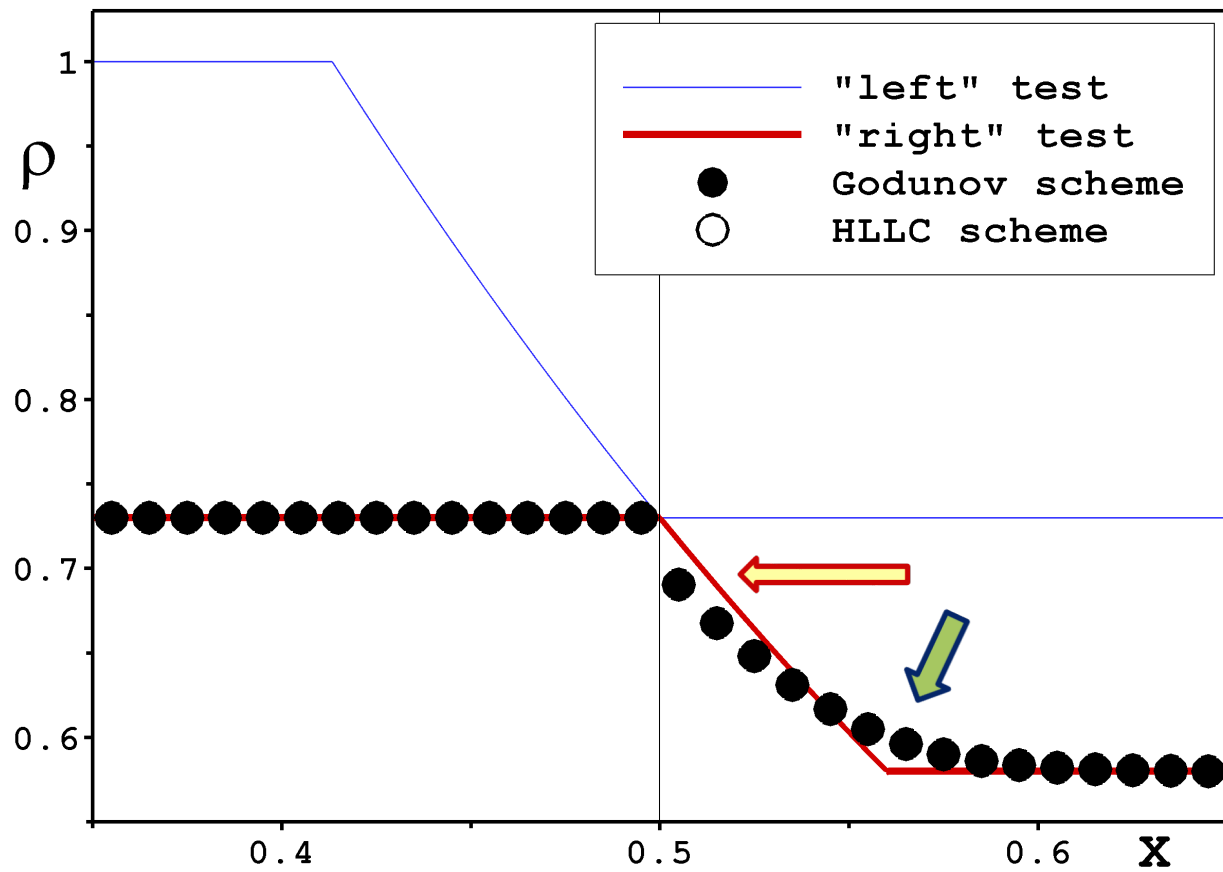
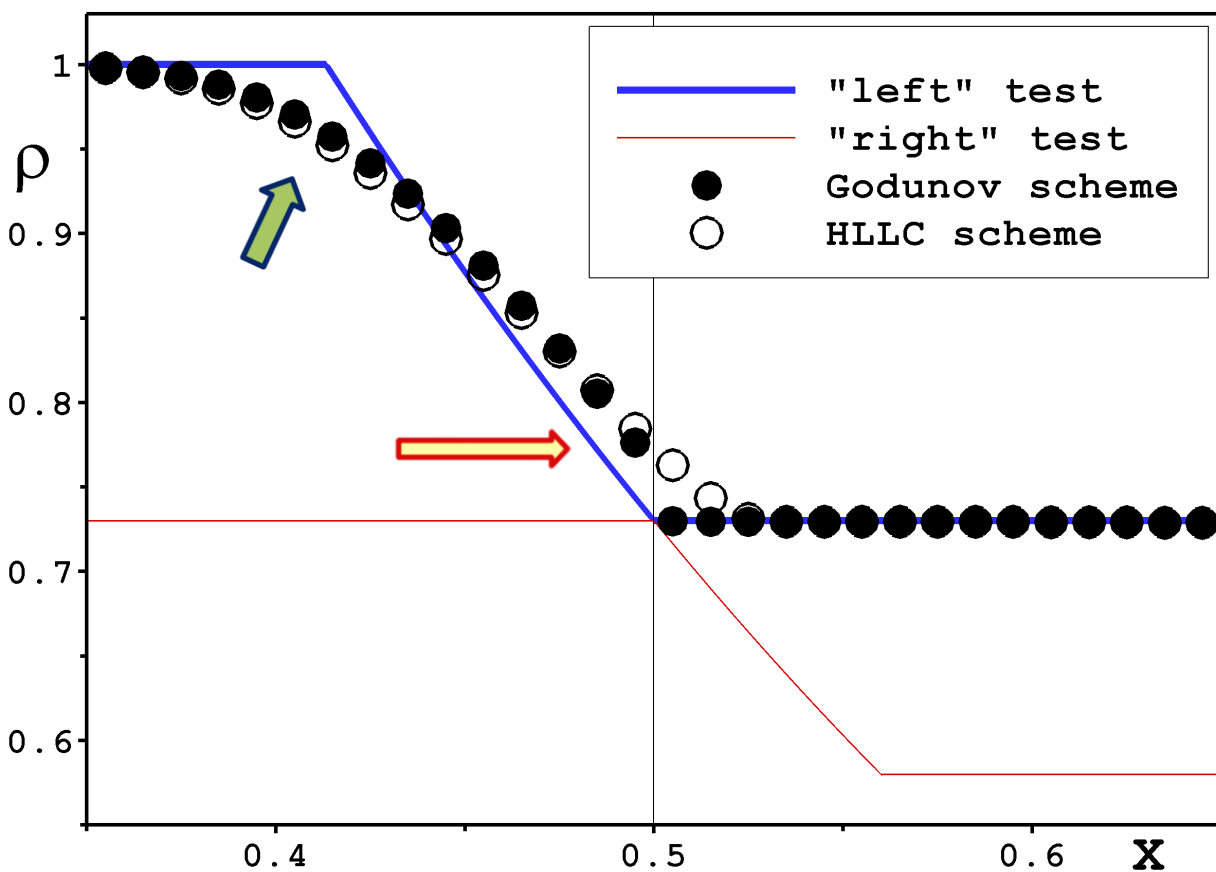
Начальные данные, $x < 0.5$:

$$u = 0.75, \rho = 1, p = 1$$

$$x > 0.5: u = 1.1110, \rho = 0.72992, p = 0.64355$$

$$u = 1.1110, \rho = 0.72992, p = 0.64355$$

$$u = 0, \rho = 1/8, p = 1/10$$



FDS- и FVS-семейства решателей задачи Римана

Решатели, базирующиеся на расщеплении разности вектора потоков (FDS = flux difference splitting)

Основной принцип: различие в параметрах газа справа и слева от начального разрыва порождает его расщепление на несколько областей с параметрами, отличными от начальных.

Примеры: точный решатель задачи Римана (схема Годунова), решатели Роу, HLL и HLLC.

Решатели, базирующиеся на расщеплении вектора потоков (FVS = flux vector splitting)

Основной принцип: потоки справа и слева от начального разрыва расщепляются каждый на два разнонаправленных потока; те из них, что пересекают грань ячейки, суммируются (результатирующий поток).

Примеры: решатели Стегера-Уорминга и ван Лира.

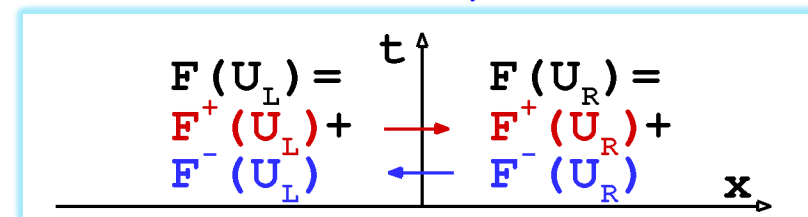
Уравнения Эйлера: $\partial \mathbf{U} / \partial t + \partial \mathbf{F}(\mathbf{U}) / \partial x = 0$: $\mathbf{A} = \partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{U}$, $\lambda_i = u - a, u, u + a$.

Расщепление вектора потока: $\mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{F}^+(\mathbf{U}) + \mathbf{F}^-(\mathbf{U})$ так, что: $\mathbf{A}^+ = \partial \mathbf{F}^+ / \partial \mathbf{U}$, $\lambda_i^+ \geq 0$,

$\mathbf{A}^- = \partial \mathbf{F}^- / \partial \mathbf{U}$, $\lambda_i^- \leq 0$.

Сверхзвуковое течение: если $\lambda_i \geq 0$, то $\mathbf{F}^+(\mathbf{U}) = \mathbf{F}(\mathbf{U})$, $\mathbf{F}^-(\mathbf{U}) = 0$,
если $\lambda_i \leq 0$, то $\mathbf{F}^+(\mathbf{U}) = 0$, $\mathbf{F}^-(\mathbf{U}) = \mathbf{F}(\mathbf{U})$.

Поток через грань ячейки: $\mathbf{F}^{RS}(\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R) = \mathbf{F}^+(\mathbf{U}_L) + \mathbf{F}^-(\mathbf{U}_R)$



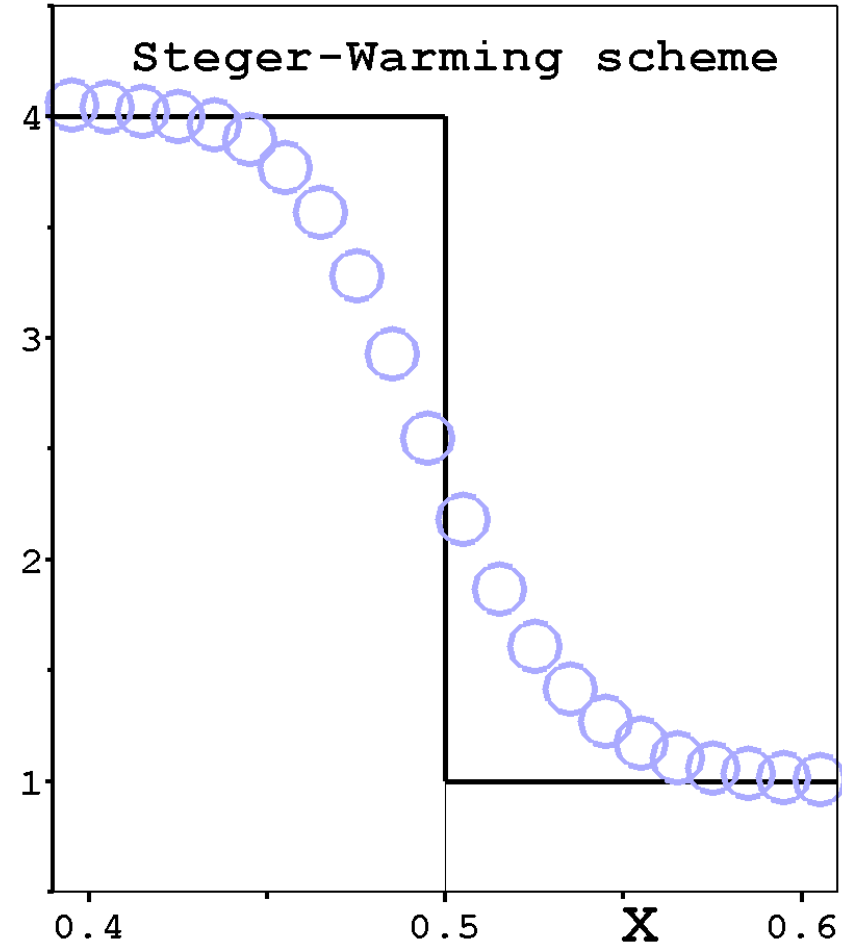
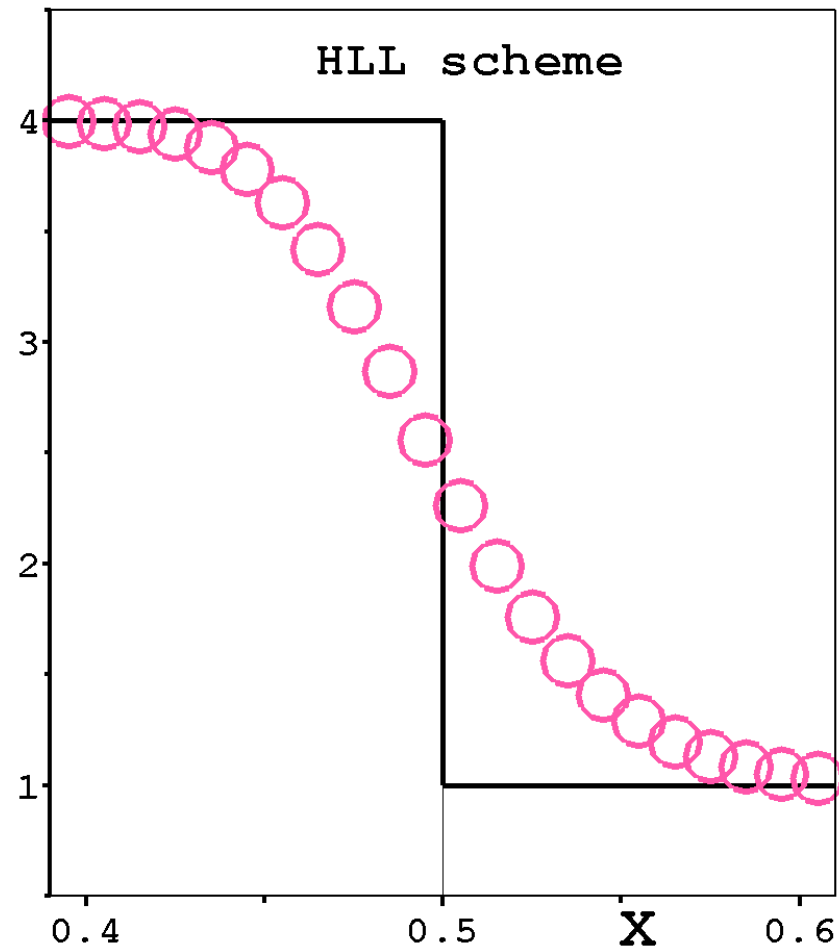
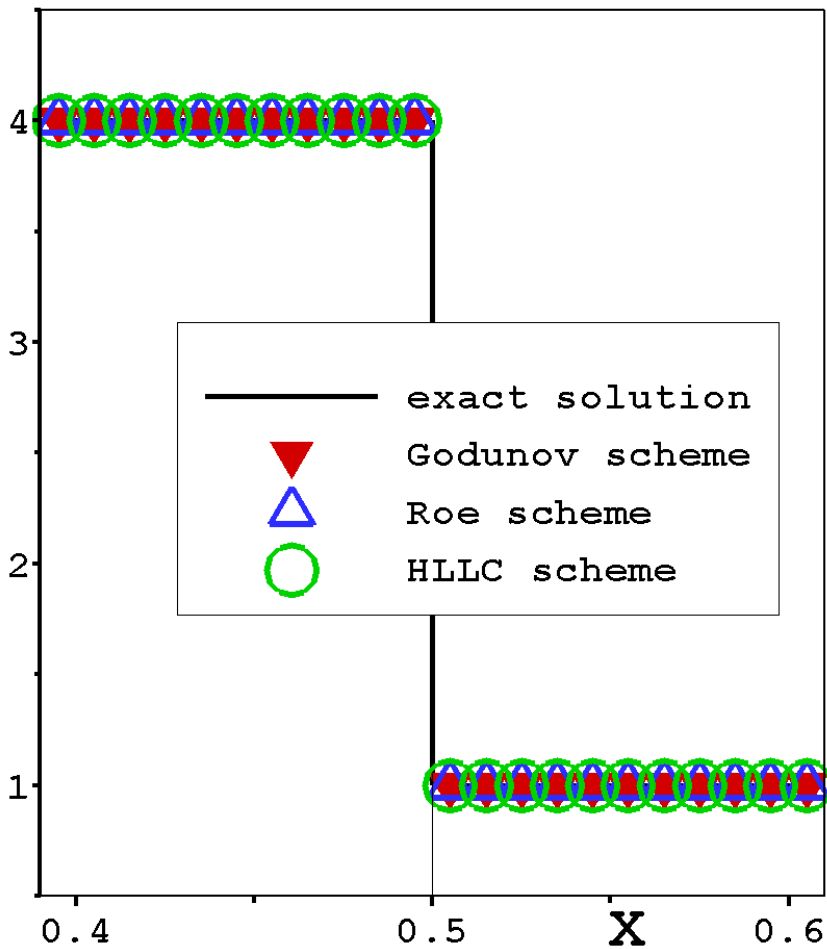
❑ **Steger J. L., Warming R. F.** Flux vector splitting of the inviscid gasdynamic equations ... // J. Comput. Phys., **1981**

❑ **van Leer B.** Flux-vector splitting for the Euler equations // Lecture Notes in Physics. – Springer-Verlag, **1982**

Размывание неподвижного контактного разрыва

Начальные данные ($t = 0$) в области $x < 0.5$: $u = 0$, $\rho = 4$, $p = 1$;
в области $x > 0.5$: $u = 0$, $\rho = 1$, $p = 1$.

Расчеты по различным схемам до $t = 0.2$ на сетке с $\Delta x = 1/100$



Решатель (схема) AUSM

□ *Liou M. S., Steffen C. J.* A new flux splitting scheme // J. Comput. Phys., **1993**

Две составляющие вектора потока: $\mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{F}^{(c)} + \mathbf{F}^{(p)}$ (конвективный перенос газа и работа сил давления)

$$\mathbf{F}^{(c)} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 \\ u(\rho e_0 + p) \end{bmatrix} = M \hat{\mathbf{F}}, \quad \mathbf{F}^{(p)} = \begin{bmatrix} 0 \\ p \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{где } M = \frac{u}{a}, \quad \hat{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} \rho a \\ \rho a u \\ \rho a h_0 \end{bmatrix}, \quad h_0 = e_0 + \frac{p}{\rho}.$$

Вычисление параметров на грани ячейки (приближенное решение задачи Римана):

расчет скалярных величин $M_* = M_L^+ + M_R^-$, $p_* = p_L^+ + p_R^-$ и вектора $\hat{\mathbf{F}}_* = \begin{cases} \hat{\mathbf{F}}_L, & \text{если } M_* \geq 0, \\ \hat{\mathbf{F}}_R, & \text{если } M_* < 0. \end{cases}$

$$M = M^+ + M^-, \quad M^\pm = \begin{cases} \pm \frac{1}{4}(M \pm 1)^2, & \text{если } |M| \leq 1, \\ \frac{1}{2}(M \pm |M|), & \text{если } |M| > 1. \end{cases}$$

$$p = p^+ + p^-, \quad p^\pm = \begin{cases} \frac{1}{4}p(M \pm 1)^2(2 \mp M), & \text{если } |M| \leq 1, \\ \frac{1}{2}p(M \pm |M|) / M, & \text{если } |M| > 1. \end{cases}$$

AUSM⁺

AUSMDV

AUSMPW

AUSMPW+

AUSM⁺-up

□ *Liou M. S.* A Sequel to AUSM: AUSM⁺ // J. Comput. Phys., **1996**

□ *Wada Y., Liou M. S.* An accurate and robust flux splitting scheme for ... // SIAM J. Sci. Comput., **1997**

□ *Kim K. H., Rho O. H.* An improvement of AUSM schemes by introducing ... // Comput. Fluids **1998**

□ *Kim K. H., Kim C., Rho O. H.* Methods for the accurate computations of ... // J. Comput. Phys., **2001**

□ *Liou M. S.* A sequel to AUSM, Part II: AUSM⁺-up for all speeds // J. Comput. Phys., **2006**

Феномен «карбункула» или ударно-волновая неустойчивость

□ *Peery K.M., Imlay S.T.* Blunt body flow simulations – AIAA Paper 88-2924, 1988

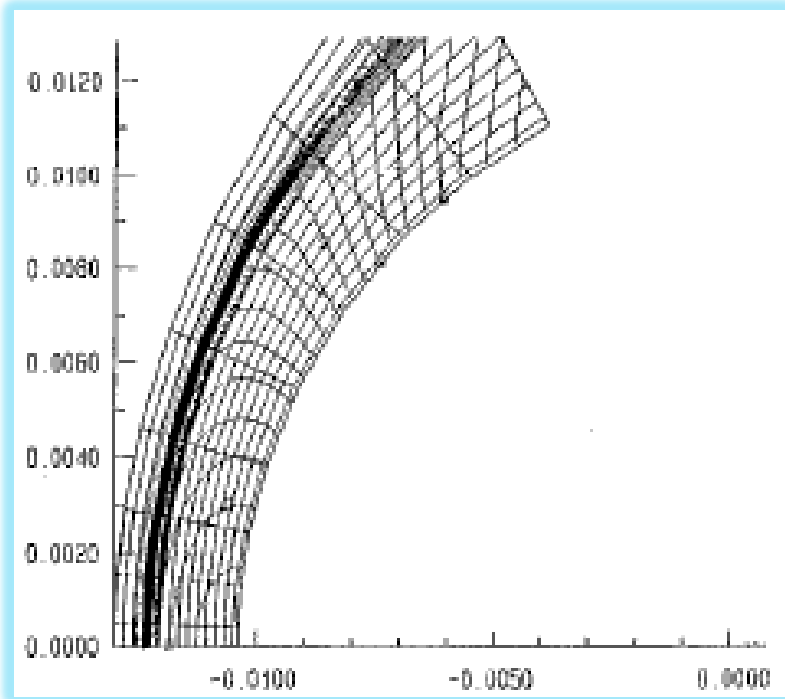
Расчет сверхзвукового обтекания затупленного тела

Необычный численный дефект: замена грубого решателя задачи Римана

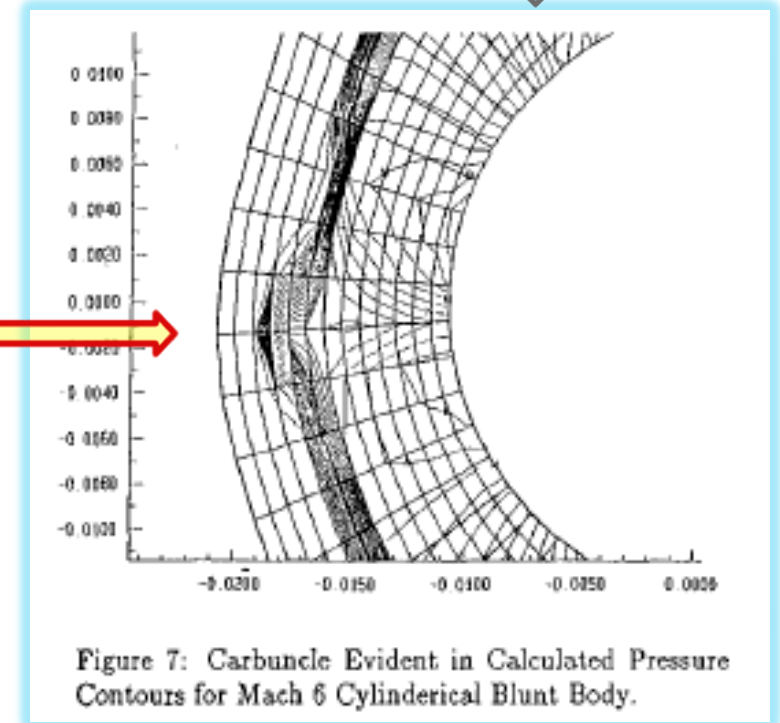
(схема Стегера-Уорминга) на более точный трехволновой решатель (схема Роу)

вместо уточнения решения привела к получению нефизического решения

(опухолеподобный нарост перед телом).



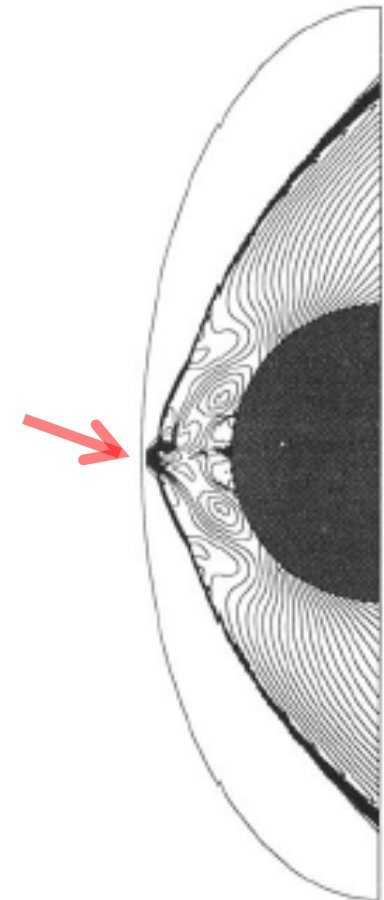
карбункул



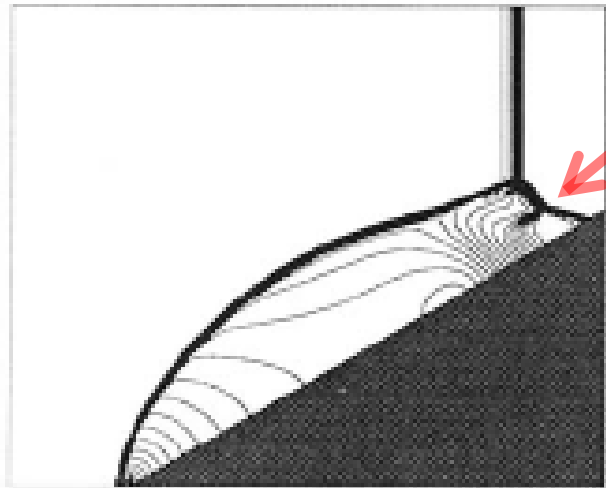
Феномен «карбункула» или ударно-волновая неустойчивость

Quirk J. J. A contribution to the great Riemann solver debate // ICASE Report, **1992**; Int. J. Numer. Meth. Fluids, **1994**

Задачи с аномальными решениями вследствие ударно-волновой неустойчивости

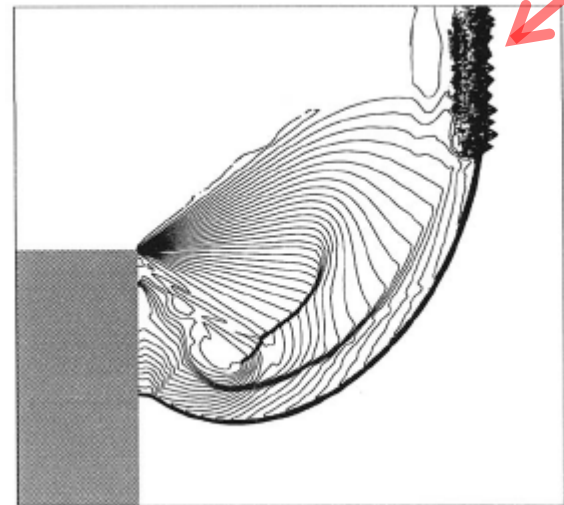


Сверхзвуковое обтекание затупленного тела



Взаимодействие ударной волны с клином

Дифракция ударной волны на 90°-угле

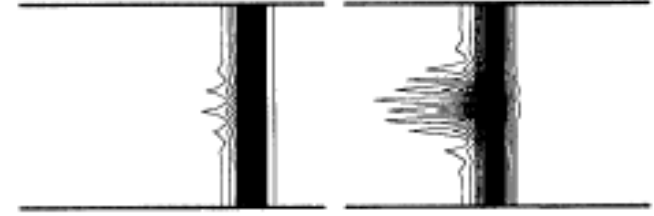


Задача Кёрка:
2D расчет плоской ударной волны



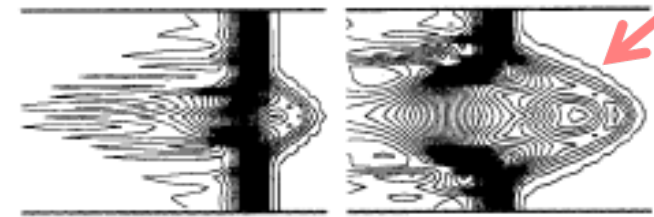
(a) $X_1 \approx 270$

(b) $X_1 \approx 300$



(c) $X_1 \approx 330$

(d) $X_1 \approx 360$



(e) $X_1 \approx 420$

(f) $X_1 \approx 480$

Феномен «карбункула» или ударно-волновая неустойчивость

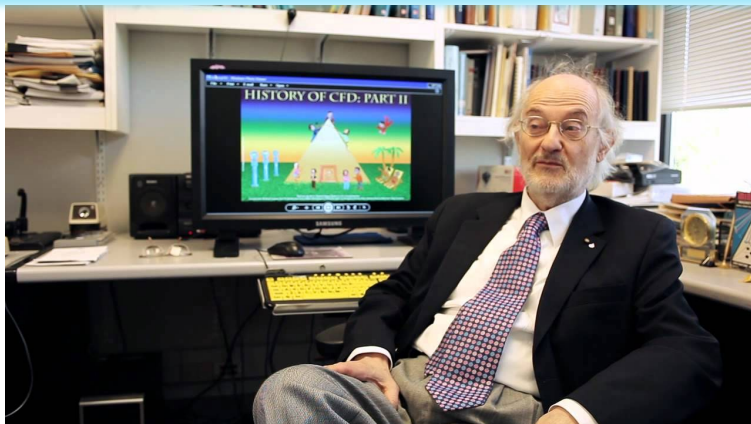
Обзоры по теме можно найти в публикациях:

- ❑ **Dumbser M. , Moschetta J.-M. , Gressier J.** A matrix stability analysis of the carbuncle ... // J. Comp. Phys., **2004**
- ❑ **Menart J.A., Henderson S.J.** Study of the issues of computational aerothermodynamics ... // AFRL report **2008-3133**
- ❑ **Kitamura K., Shima E.** Towards shock-stable and accurate hypersonic heating computations ... // J. Comp. Phys., **2004**
- ❑ **Rodionov A.V.** Artificial viscosity in Godunov-type schemes to cure the carbuncle ... // J. Comp. Phys., **2017**
- ❑ **Xie W., Li W., Li H., Tian Z., Pan S.** On numerical instabilities of Godunov-type schemes for ... // J. Comp. Phys., **2017**

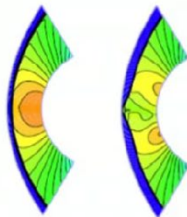
- ❑ **van Leer B.** The development of numerical fluid mechanics and aerodynamics since the 1960s: US and Canada // Notes on Num. Fluid Mech., **2009**

- ❑ **Phil Roe** Colorful Fluid Dynamics: Behind the Scenes – Lecture published in Michigan Engineering., **2013**

This greatest unresolved problem of classical finite-volume schemes ...



A skeleton in the closet



Inviscid supersonic flow past a circular cylinder should be very simple, with a smooth bow shock standing ahead of it. Many CFD codes, however, produce a solution like the one on the right, featuring oblique shocks and reversed flow. This solution, known as a carbuncle, appears to completely satisfy the Euler equations.

This only happens at Mach numbers greater than about 6.0, as the shock jump conditions become increasingly nonlinear. The cause and cure are still hotly debated.

Условия появления ударно-волновой неустойчивости

- В окрестности ударной волны линии тока совпадают с сеточными линиями или близки к ним.
- Ударно-волновое число Маха превышает некоторое пороговое значение ($M_s^c \approx 2.1$).
- В схеме используется точный решатель задачи Римана или один из наиболее близких его аналогов (решатели Roe, HLLC).

Способы борьбы с ударно-волновой неустойчивостью

- Внесение модификаций в базовые решатели задачи Римана с целью повышения их диссипации в окрестности ударной волны.
- Использование комбинаций разных решателей в зависимости от локальных условий течения.
- Использование «rotated» или «rotated-hybrid» решателей с декомпозицией нормали к боковой грани на два направления.

Физические основы первых схем сквозного счета

❑ **Von Neumann, Richtmyer.** A method for the numerical calculation of hydrodynamic shocks // J. Appl. Phys., **1950**

- Добавление членов искусственной вязкости (art. visc.), имитирующих действие физической вязкости (уравнения Навье-Стокса).
- При прохождении потока через фронт ударной волны члены искусственной вязкости переводят кинетическую энергию во внутреннюю энергию

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{F}^{\text{art. visc.}}}{\partial x} + \left\{ \begin{array}{l} \text{approx.} \\ \text{errors} \end{array} \right\}$$

❑ **Годунов.** Разностный метод расчета ударных волн // Успехи мат. наук, **1957**

❑ **Годунов.** Разностный метод численного расчета разрывных решений урав-ий гидродинамики // Мат. сб., **1959**

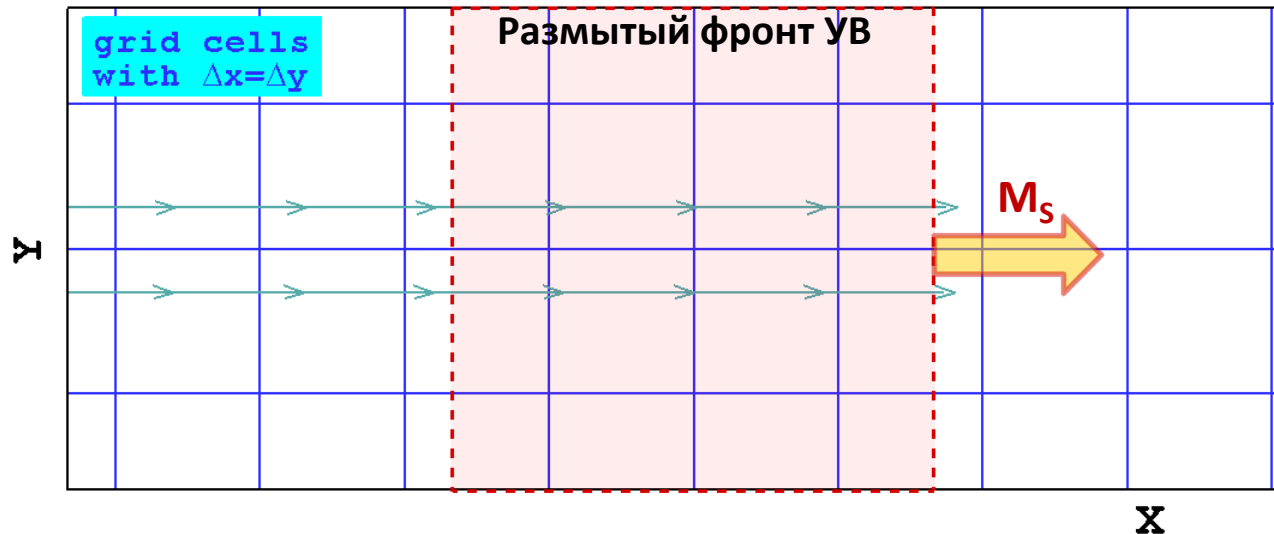
- Задача Римана (базовый элемент схемы) формулируется строго в рамках решения уравнений Эйлера.
- Размывание ударной волны происходит за счет схемной вязкости (ошибки аппроксимации).
- Свойство схемы сохранять монотонность решения позволяет получать более гладкие профили за ударной волной.

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = \left\{ \begin{array}{l} \text{approx.} \\ \text{errors} \end{array} \right\}$$

Тестовая задача Кёрка

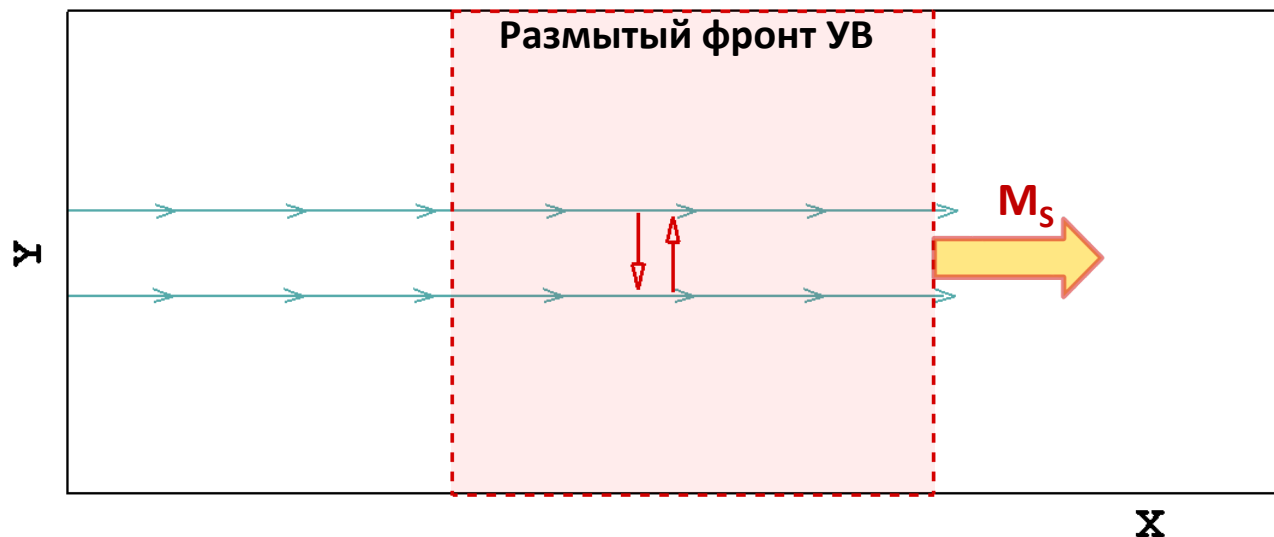
Аппроксимация уравнений Эйлера:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_y}{\partial y} = \left\{ \begin{array}{l} \text{approx.} \\ \text{errors} \end{array} \right\}_x$$

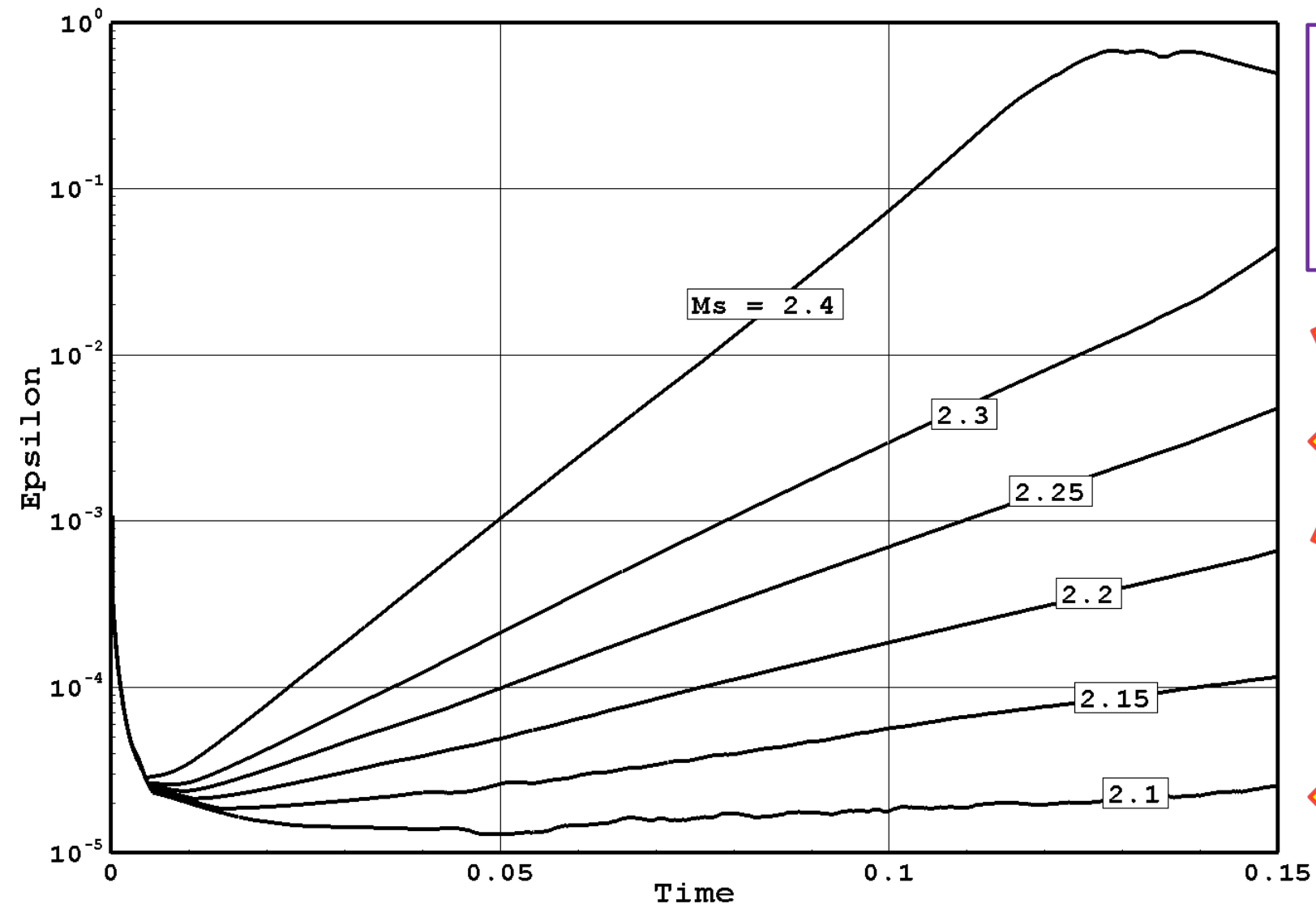


Уравнения Навье-Стокса:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_y}{\partial y} = \frac{\partial \mathbf{F}_x^{\text{visc}}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_y^{\text{visc}}}{\partial y}$$



Тестовая задача Кёрка



Усеченные уравнения Навье-Стокса:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_y}{\partial y} = \frac{\partial \mathbf{F}_x^{\text{visc}}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_y^{\text{visc}}}{\partial y}$$

экспоненциальный рост
возмущений

устойчивый счет

Эволюция во времени отклонения решения от одномерного потока (ϵ) для различных чисел Маха (M_S).

Искусственная вязкость в схемах типа Годунова

- ❑ **Rodionov A.V.** Artificial viscosity in Godunov-type schemes to cure the carbuncle phenomenon // J. Comp. Phys., **2017**
- ❑ **Rodionov A.V.** Artificial viscosity to cure the shock instability in high-order Godunov-type schemes // Comp. & Fluids, **2019**

Основные положения метода искусственной вязкости

- На фронте УВ в базовый метод решения уравнений Эйлера добавляется диссипация в форме правых частей уравнений Навье-Стокса («вязкие» члены).

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_y}{\partial y} = \frac{\partial \mathbf{F}_x^{\text{visc}}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_y^{\text{visc}}}{\partial y}$$

- В «вязких» членах коэффициент физической (молекулярной) вязкости заменяется коэффициентом искусственной вязкости.
- Выражение для коэффициента искусственной вязкости Неймана-Рихтмайера обобщается на многомерность и в него вводится «пороговая» величина (ограничивает область введения искусственной вязкости).

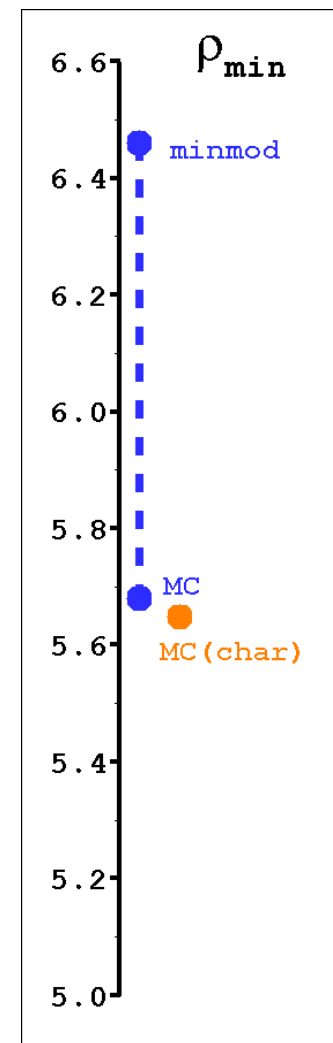
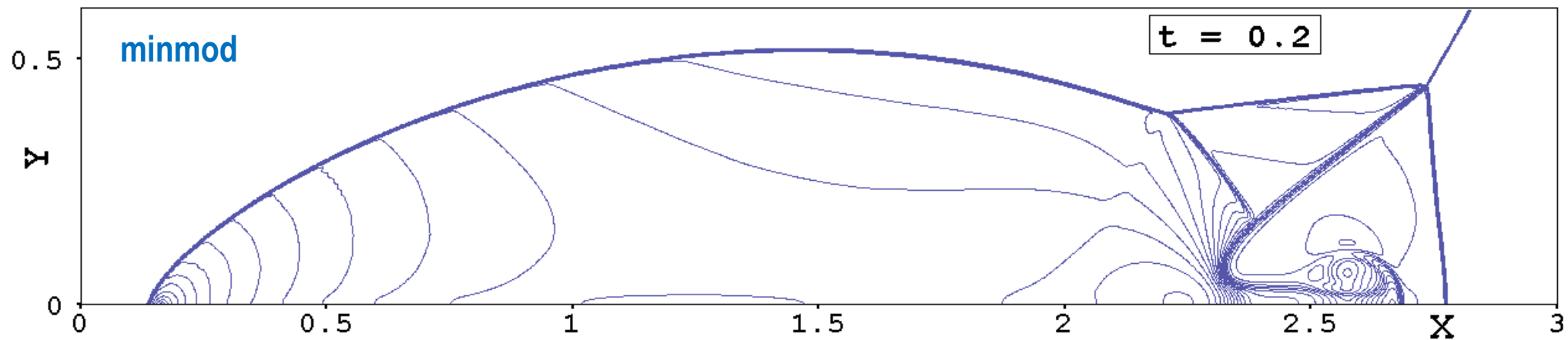
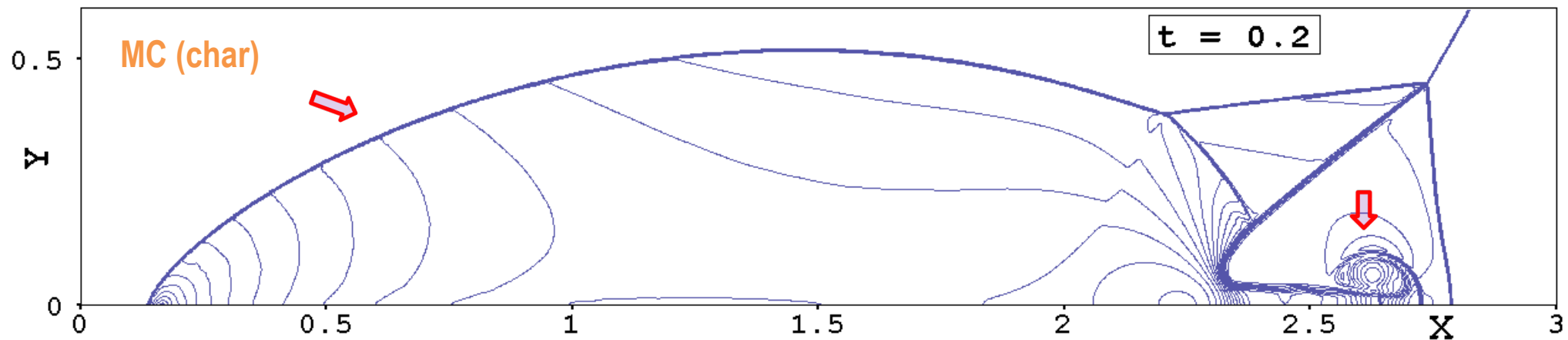
$$\mu_{AV} = \begin{cases} C_{AV} \rho h^2 \sqrt{(\nabla \mathbf{u})^2 - (C_{th} a / h)^2}, & \text{если } \nabla \mathbf{u} < -C_{th} a / h \\ 0, & \text{в противном случае (вне фронта УВ)} \end{cases}$$

- Метод является внешним по отношению к конкретной схеме и не меняет алгоритма расчета «невязких» потоков.

Тестовая задача о двойном маховском отражении

Результаты расчета задачи методом HR с решателем задачи Римана HLL
на сетке с $\Delta x = \Delta y = 1/480$

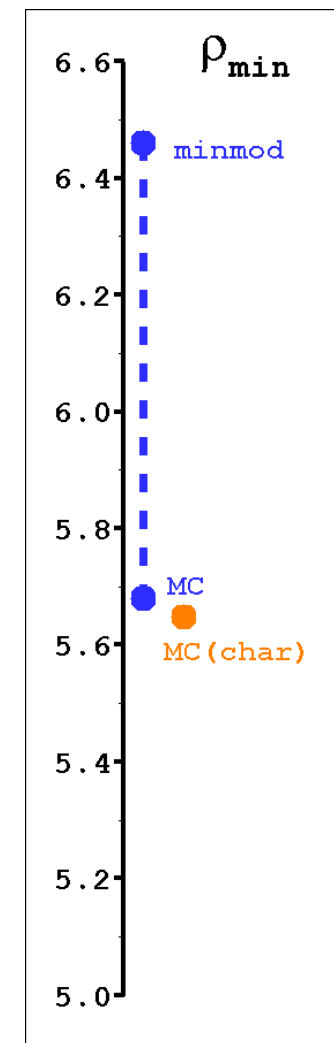
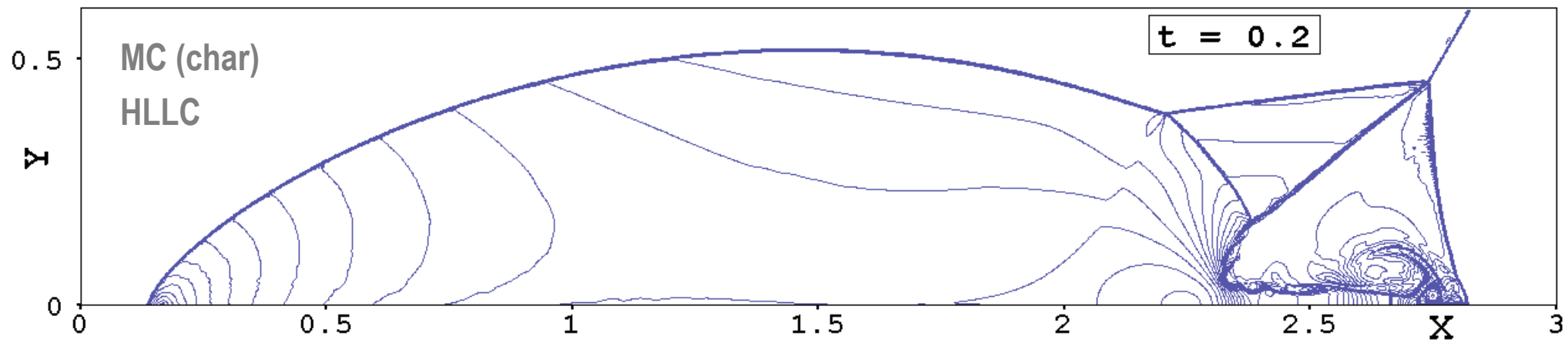
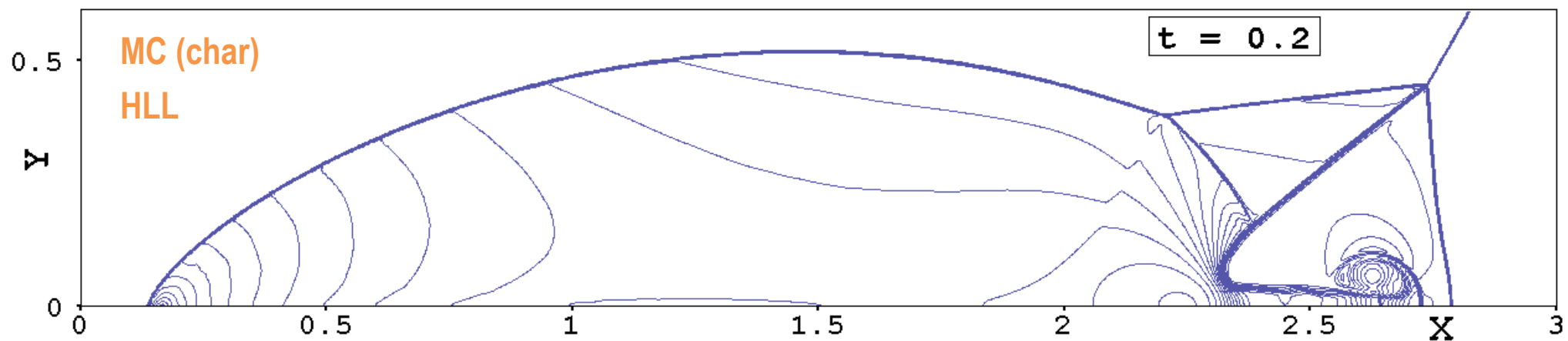
Изолинии плотности



Тестовая задача о двойном маховском отражении

Результаты расчета задачи методом HR с решателями задачи Римана HLL и HLLC
на сетке с $\Delta x = \Delta y = 1/480$

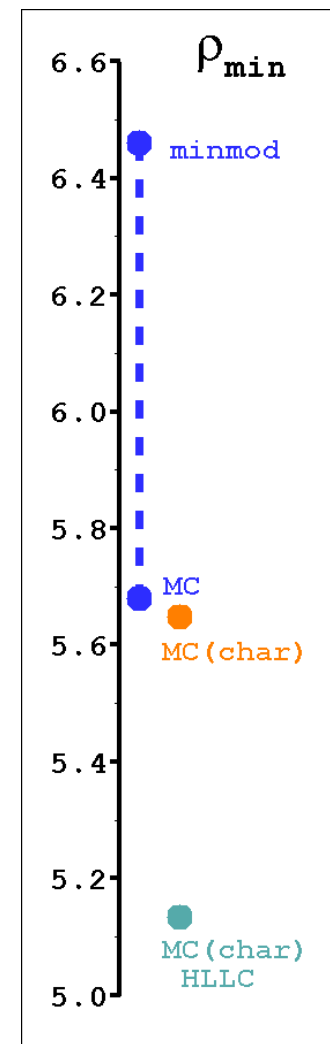
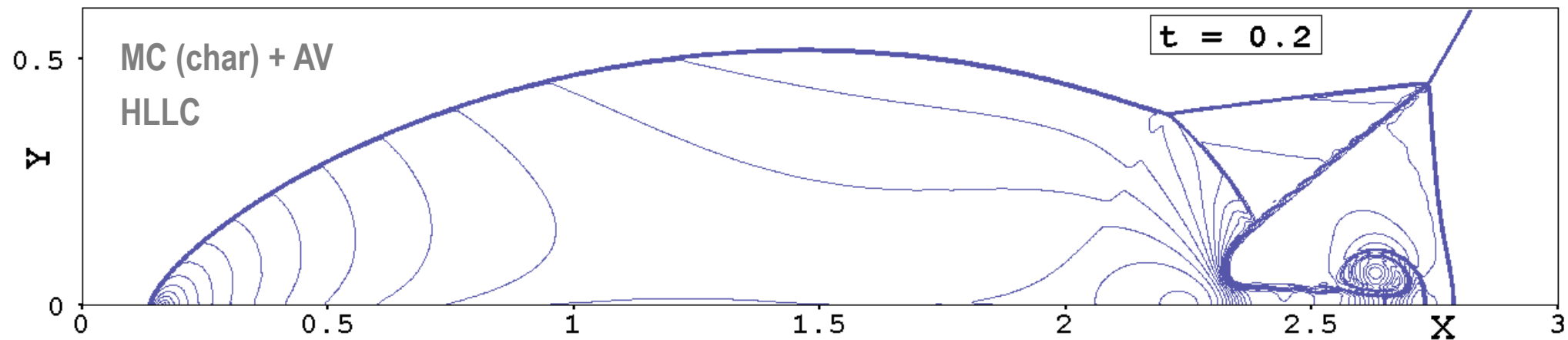
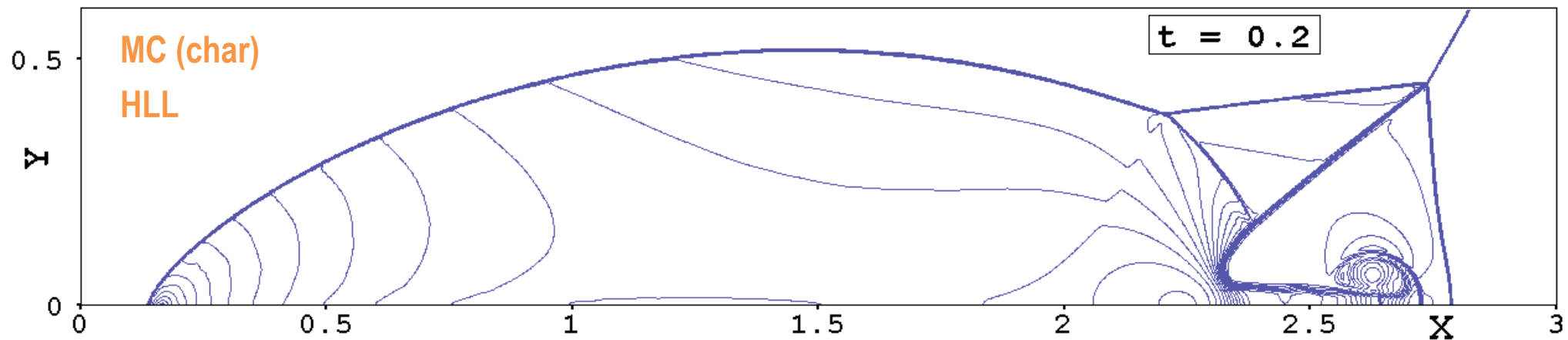
Изолинии плотности



Тестовая задача о двойном маховском отражении

Результаты расчета задачи методом HR с решателями задачи Римана HLL и HLLC
на сетке с $\Delta x = \Delta y = 1/480$

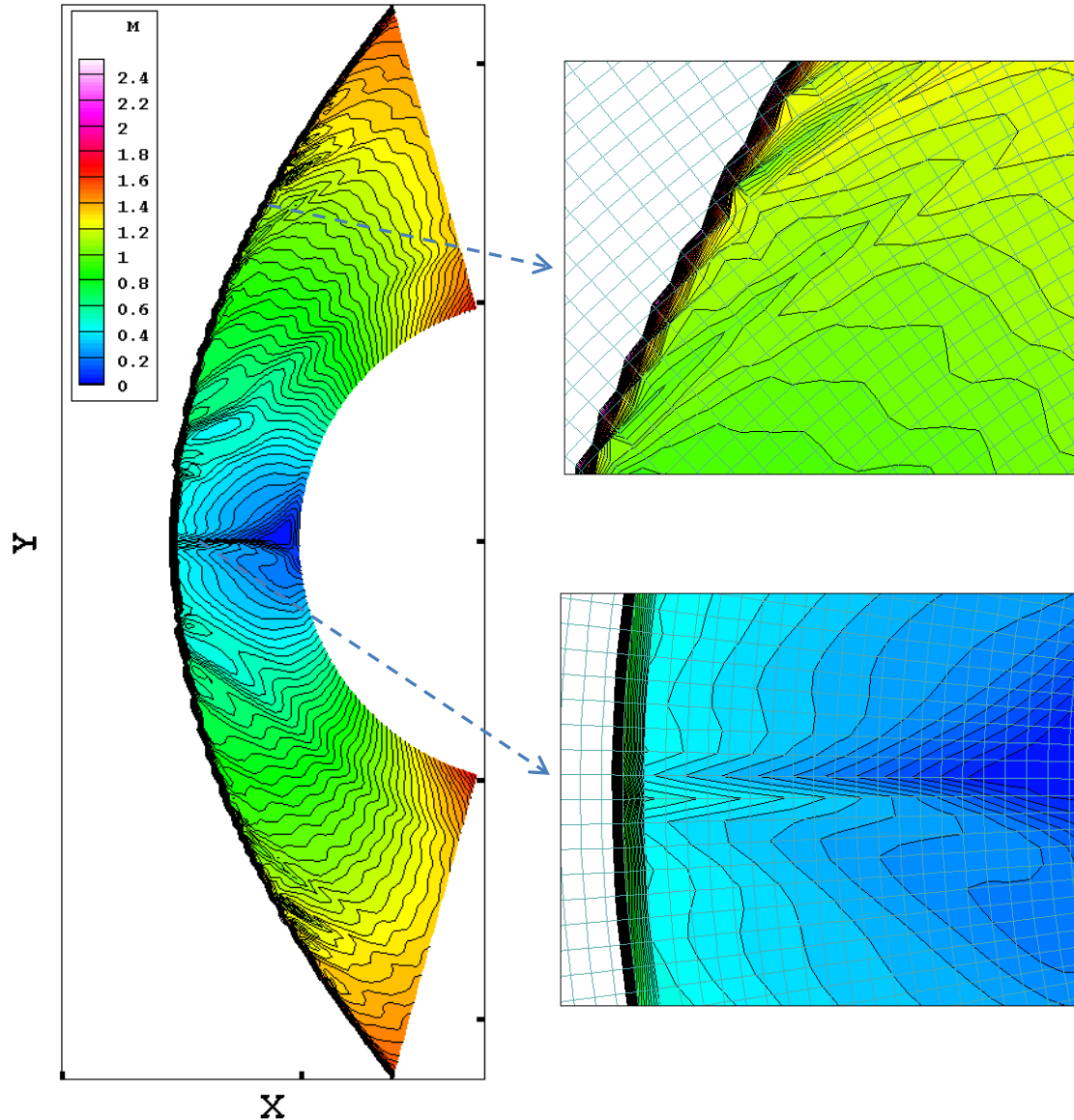
Изолинии плотности



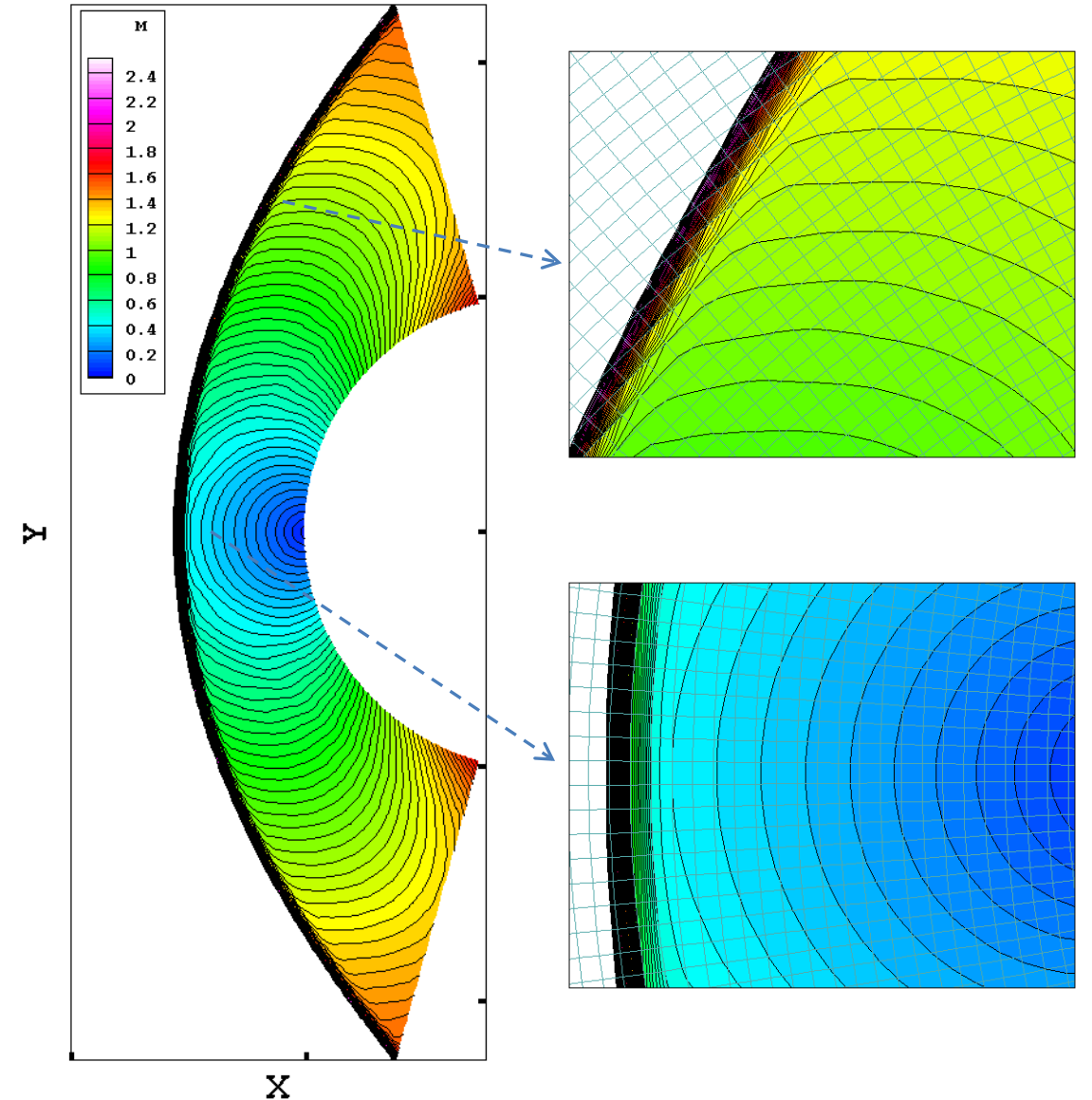
Искусственная вязкость в схемах типа Годунова

Расчет сверхзвукового обтекания цилиндра ($M = 4$)

Схема HR-MC (exact RS)



с добавлением искусственной вязкости



Решатель (схема) HLLC

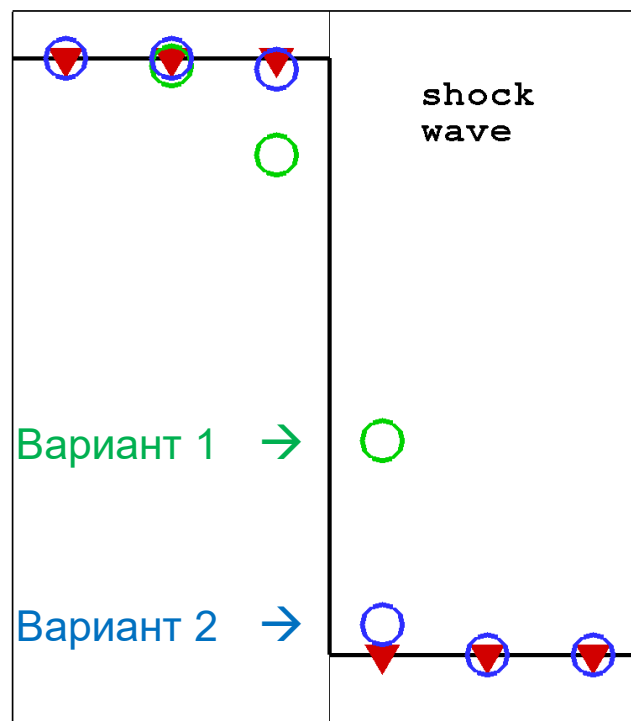
Способы расчета скоростей распространения возмущений вправо и влево от разрыва (S_R и S_L)

□ **Davis S.F.** Simplified second-order Godunov-type methods, SIAM J. Sci. Stat. Comput. 9(3), **1988**

Вариант 1: $S_L = \min\{u_L - a_L, u_R - a_R\}, \quad S_R = \max\{u_L + a_L, u_R + a_R\}.$

□ **Toto E.F., Spruce M., Speares W.** Restoration of the contact surface in the HLL-Riemann solver // Shock Waves, **1994**

Вариант 2: $S_L = u_L - q_L a_L, \quad S_R = u_R + q_R a_R, \quad q_L = f(\hat{p}_* / p_L, \gamma), \quad q_R = f(\hat{p}_* / p_R, \gamma).$



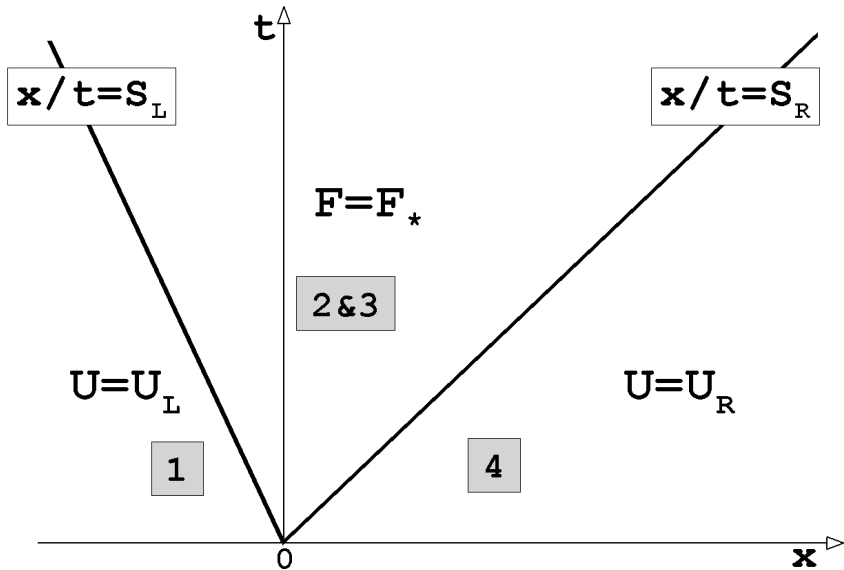
Rusanov flux (local Lax-Friedrichs flux)

❑ **Русанов В.В.** Расчет взаимодействия нестационарных ударных волн с препятствиями // ЖВМ и МФ, **1961**

Максимальная скорость распространения возмущений: $S^{\max} = \max \{|S_L|, |S_R|\}$

Вектор потока в схеме Русанова: $\mathbf{F}_* = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_L + \mathbf{F}_R) - \frac{1}{2}S^{\max}(\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L)$

$$S_R = S^{\max}, \quad S_L = -S^{\max}$$



Вектор потока в схеме HLL:

$$\mathbf{F}_* = \frac{S_R \mathbf{F}_L - S_L \mathbf{F}_R + S_R S_L (\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L)}{S_R - S_L}$$

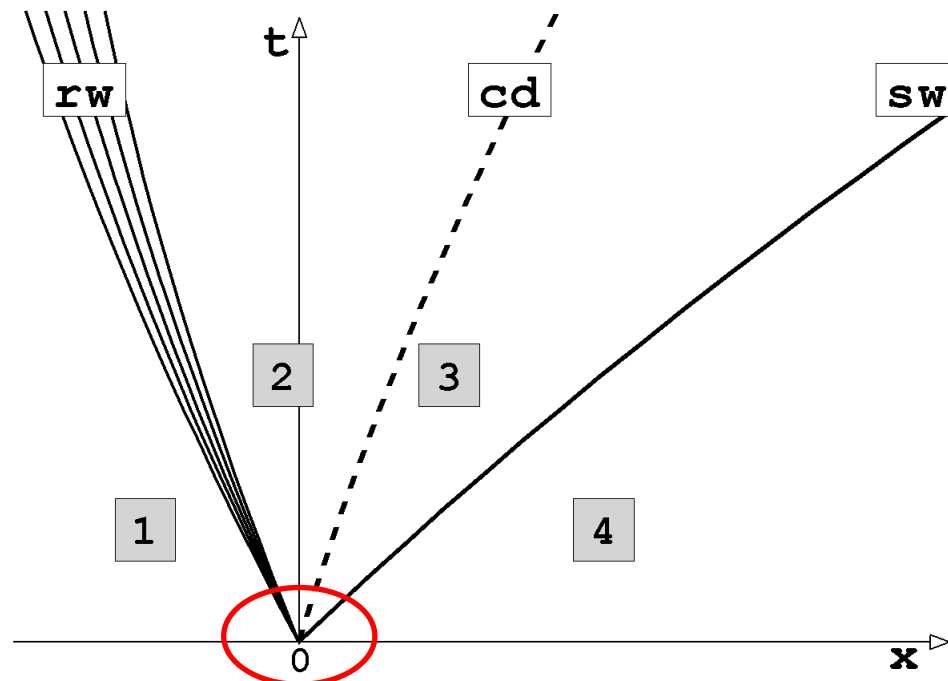
Разрыв распадается на две волны, скорости которых (S_R и S_L). Контактный разрыв отсутствует.

Литература по теме:

❑ **Меньшов И. С.** Повышение порядка аппроксимации схемы Годунова на основе решения обобщенной задачи Римана // ЖВМ и МФ, **1990**

❑ **Toro E.F.** Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics, 3-rd edition. Springer-Verlag, Berlin, **2009**

❑ **Ben-Artzi M., Falcovitz J.** Generalized Riemann Problems in Computational Fluid Dynamics, Cambridge University Press, **2003**



Chapter 19. The Generalized Riemann Problem

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ