

Схемы типа Годунова в вычислительной газовой динамике

VIII. Схемы повышенной точности: цена вопроса  
(часть 1)

Родионов Александр Владимирович



# Расчетная сетка и метрические величины

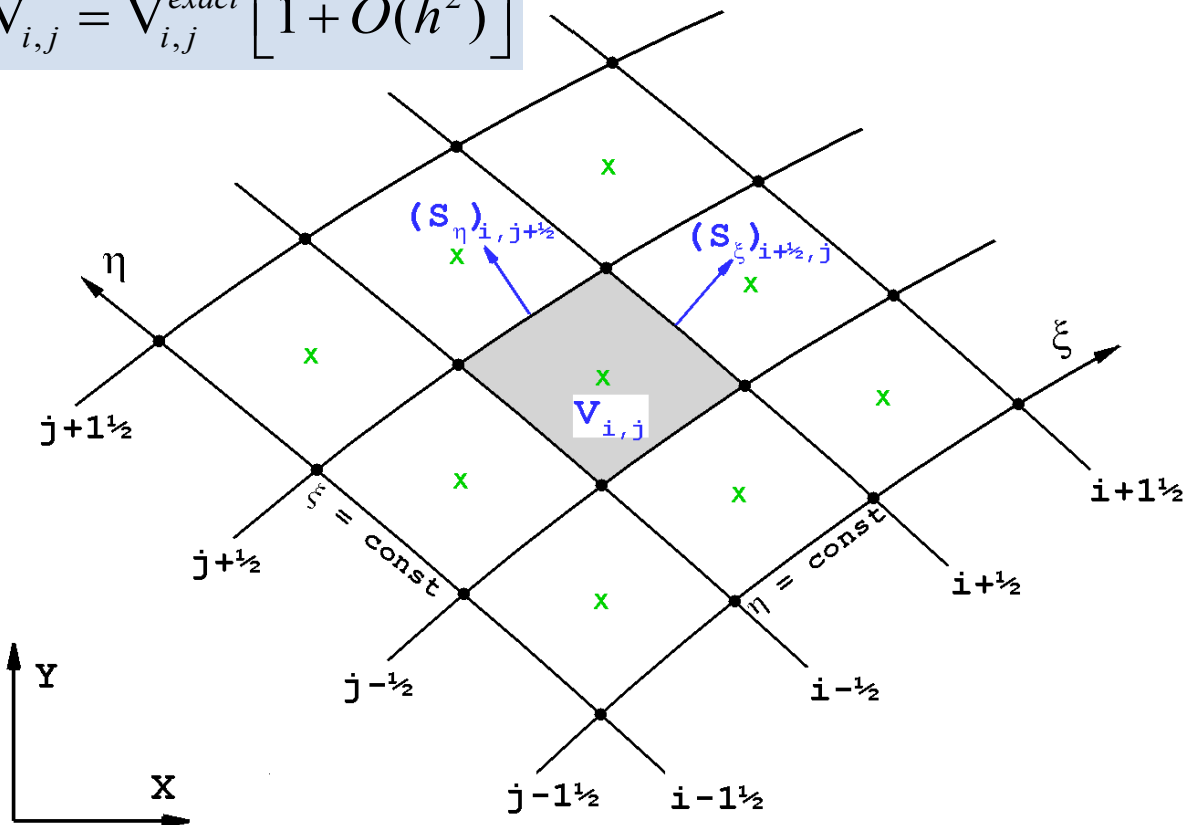
## I. Гладкая структурированная криволинейная сетка.

В двумерном случае сеточные индексы  $(i, j)$  соответствуют криволинейным координатам  $(\xi, \eta)$ , которые переводят сетку физического пространства  $xu$  в квадратную сетку с интервалами  $\Delta\xi = \Delta\eta = 1$ .

Метрические величины (объемы ячеек и вектор-площади боковых граней в двух сеточных направлениях):

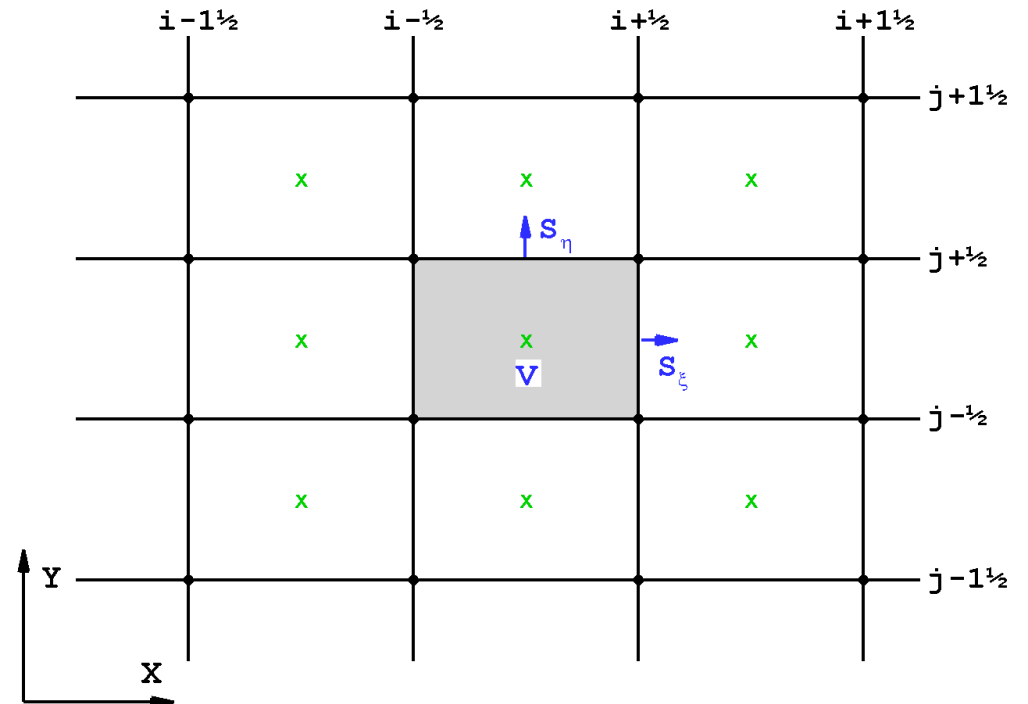
$$V_{i,j} = \int_{j-1/2}^{j+1/2} \int_{i-1/2}^{i+1/2} J d\xi d\eta, \quad (\mathbf{S}_\xi)_{i+1/2,j} = \int_{j-1/2}^{j+1/2} J(\vec{\nabla} \cdot \xi) d\eta, \quad (\mathbf{S}_\eta)_{i+1/2,j} = \int_{i-1/2}^{i+1/2} J(\vec{\nabla} \cdot \eta) d\xi, \quad \text{где } J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)}$$

$$V_{i,j} = V_{i,j}^{exact} [1 + O(h^2)]$$



## II. Равномерная прямоугольная сетка:

$$V = \Delta x \cdot \Delta y, \quad \mathbf{S}_\xi = (\Delta y, 0), \quad \mathbf{S}_\eta = (0, \Delta x)$$



# Конечно-объемная и конечно-разностная аппроксимации

Уравнения Эйлера в декартовых координатах  $x, y$  имеют вид

$$\frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{Q})}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_x(\mathbf{Q})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_y(\mathbf{Q})}{\partial y} = 0, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ \rho \\ p \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u_x \\ \rho u_y \\ \rho e_0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_x = \begin{bmatrix} \rho u_x \\ \rho u_x^2 + p \\ \rho u_x u_y \\ u_x(\rho e_0 + p) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_y = \begin{bmatrix} \rho u_y \\ \rho u_x u_y \\ \rho u_y^2 + p \\ u_y(\rho e_0 + p) \end{bmatrix},$$

где  $\mathbf{Q}$  - вектор примитивных переменных,  $\mathbf{U}$  - вектор консервативных переменных,

$\mathbf{F}_x$  и  $\mathbf{F}_y$  - вектора потоков,  $e_0 = \frac{u_x^2 + u_y^2}{2} + e(p, \rho)$  - удельная полная энергия.

## I. Гладкая структурированная криволинейная сетка.

Конечно-объемная аппроксимация уравнений Эйлера (полудискретная форма записи):

$$\frac{\partial \mathbf{U}_{i,j}}{\partial t} = -\frac{1}{V_{i,j}} \left[ (S_{\xi x} \mathbf{F}_x + S_{\xi y} \mathbf{F}_y)_{i+1/2,j} - (S_{\xi x} \mathbf{F}_x + S_{\xi y} \mathbf{F}_y)_{i-1/2,j} + (S_{\eta x} \mathbf{F}_x + S_{\eta y} \mathbf{F}_y)_{i,j+1/2} - (S_{\eta x} \mathbf{F}_x + S_{\eta y} \mathbf{F}_y)_{i,j-1/2} \right]$$

## II. Равномерная прямоугольная сетка.

Конечно-объемная аппроксимация уравнений Эйлера:

$$\frac{\partial \mathbf{U}_{i,j}}{\partial t} = - \left[ \frac{(\mathbf{F}_x)_{i+1/2,j} - (\mathbf{F}_x)_{i-1/2,j}}{\Delta x} + \frac{(\mathbf{F}_y)_{i,j+1/2} - (\mathbf{F}_y)_{i,j-1/2}}{\Delta y} \right]$$

Отличие конечно-разностной аппроксимации от конечно-объемной аппроксимации

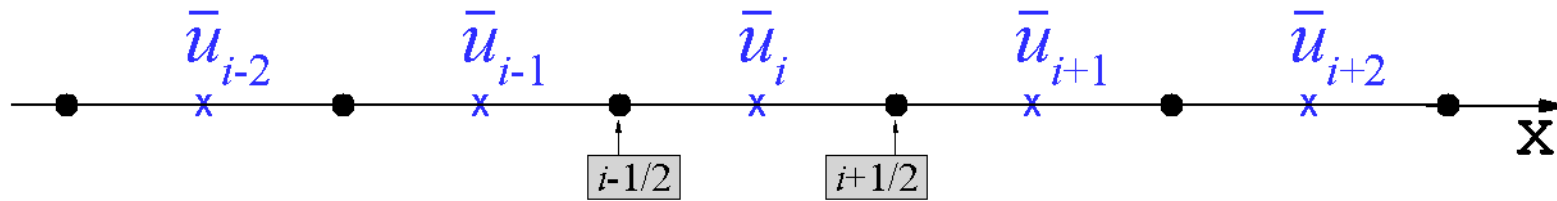
- 1) параметры определяются в узлах сетки, а не в центрах ячеек;
- 2) используются значения параметров в точке, а не средние значения по ячейке

# Конечно-объемная и конечно-разностная аппроксимации

Линейное уравнение переноса в одномерном случае:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0, \quad f = au, \quad a = \text{const.}$$

I. Конечно-объемная аппроксимация



Интегрирование по  $i$ -ой ячейке:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} = -\frac{1}{\Delta x} \left[ (au)_{i+1/2} - (au)_{i-1/2} \right] = \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} \right)^{\text{exact}} + O(\Delta x^m)$$

$$\bar{u}_i = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x) dx = u|_{x=x_i} + \frac{\Delta x^2}{24} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x=x_i} + \frac{\Delta x^4}{1920} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \Big|_{x=x_i} + \dots$$

Аппроксимация на боковой грани  $i+1/2$ :

$$u_{i+1/2} = \sum_k C_{i-k}^* \bar{u}_k = u|_{x=x_{i+1/2}} + \alpha \Delta x^m \frac{\partial^m u}{\partial x^m} \Big|_{x=x_{i+1/2}} + O(\Delta x^{m+1})$$

Аппроксимация на боковой грани  $i-1/2$ :

$$u_{i-1/2} = \sum_k C_{i-k}^* \bar{u}_{k-1} = u|_{x=x_{i-1/2}} + \alpha \Delta x^m \frac{\partial^m u}{\partial x^m} \Big|_{x=x_{i-1/2}} + O(\Delta x^{m+1})$$

Результирующая аппроксимация:

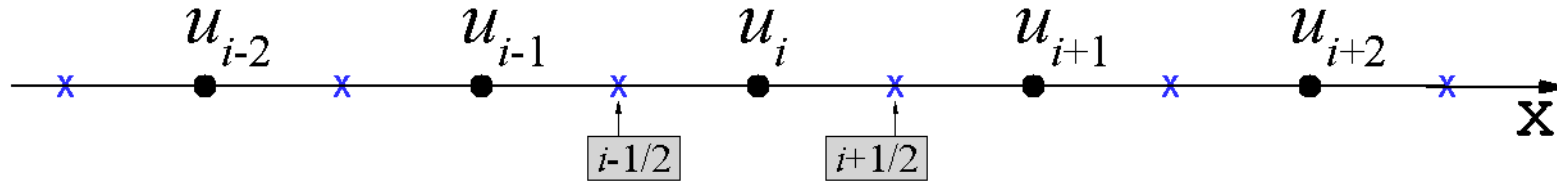
$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} = -\frac{1}{\Delta x} \sum_k C_{i-k} (a\bar{u}_k), \quad \text{где } C_{i-k} = C_{i-k}^* - C_{i-k+1}^*$$

# Конечно-объемная и конечно-разностная аппроксимации

Линейное уравнение переноса в одномерном случае:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0, \quad f = au, \quad a = \text{const.}$$

## II. Конечно-разностная аппроксимация



$$u_i = u|_{x=x_i}$$

Аппроксимация пространственной производной: 
$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -\frac{1}{\Delta x} \sum_k C_{i-k} (au_k) = -\frac{\partial f(u)}{\partial x} \Big|_{x=x_i}^{\text{exact}} + O(\Delta x^m)$$

Представление в консервативном виде: 
$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -\frac{1}{\Delta x} \sum_k C_{i-k} (au_k) = -\frac{1}{\Delta x} \left[ (au)_{i+1/2} - (au)_{i-1/2} \right]$$

Когда решение есть полиномиальная функция:

$$u(x) = P_m(x), \quad u_i = P_m(x_i)$$

$$\frac{1}{\Delta x} \int_{x-\Delta x/2}^{x+\Delta x/2} P_m(x') dx' = R_m(x), \quad \bar{u}_i = R_m(x_i)$$

$$C_{i-k} = C_{i-k}^* - C_{i-k+1}^*$$

$$u_{i-1/2} = \sum_k C_{i-k}^* u_{k-1}$$

$$u_{i+1/2} = \sum_k C_{i-k}^* u_k$$

# Конечно-объемная и конечно-разностная аппроксимации

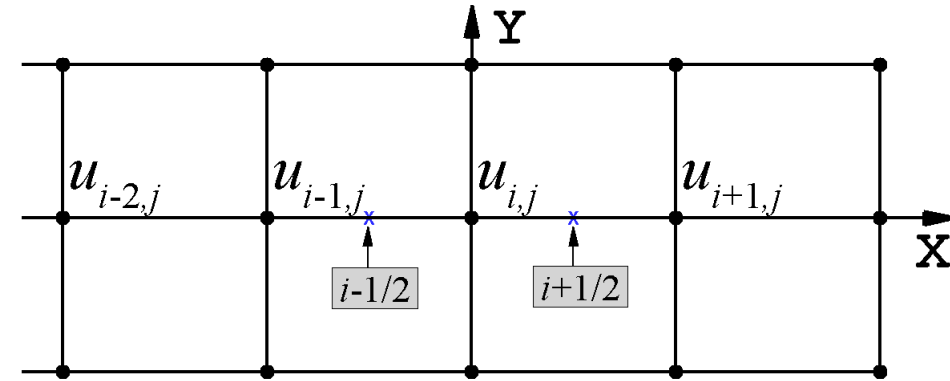
Линейное уравнение переноса в двумерном случае:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} = 0, \quad f_x = a_x u, \quad f_y = a_y u.$$

## II. Конечно-разностная аппроксимация

Одномерные аппроксимации пространственных производных:

$$\frac{1}{\Delta x} \sum_k C_{i-k} (a u_{k,j}) = \left. \frac{\partial f_x}{\partial x} \right|_{x=x_i}^{\text{exact}} + O(\Delta x^m)$$



## I. Конечно-объемная аппроксимация

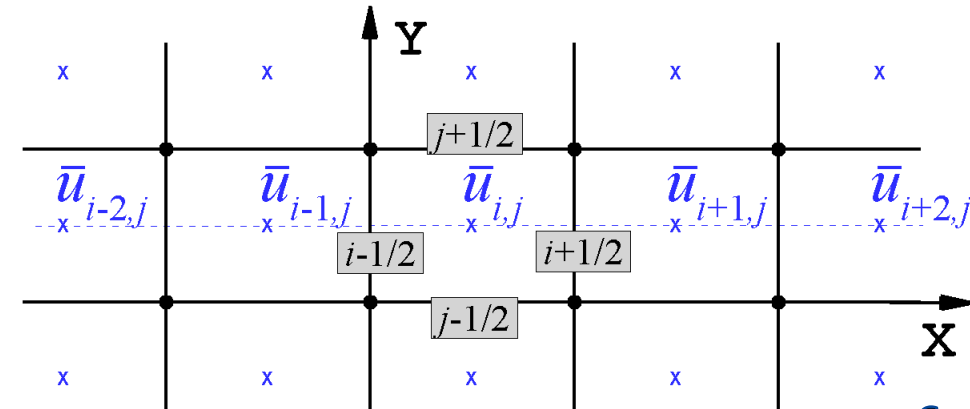
$$\frac{\partial \bar{u}_{i,j}}{\partial t} = -\frac{1}{\Delta x} \left[ (a_x \tilde{u})_{i+1/2} - (a_x \tilde{u})_{i-1/2} \right] - \frac{1}{\Delta y} \left[ (a_y \hat{u})_{j+1/2} - (a_y \hat{u})_{j-1/2} \right]$$

Сведение к одномерной аппроксимации вдоль оси  $x$  ( $j = \text{const}$ ):

$$\tilde{u}(x) = \frac{1}{\Delta y} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} u(x, y) dy \quad \Rightarrow \quad \bar{u}_{i,j} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \tilde{u}(x) dx$$

Аппроксимация на боковой грани  $i+1/2$ :

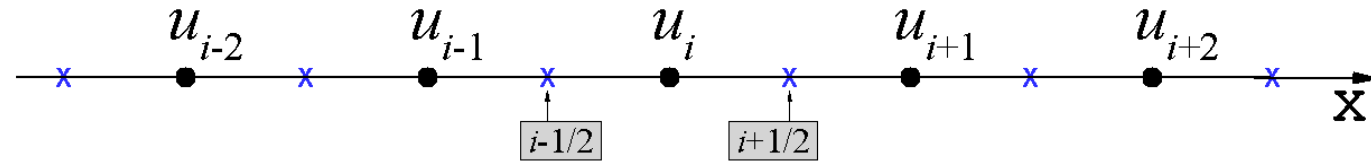
$$\tilde{u}_{i+1/2} = \sum_k C_{i-k}^* \bar{u}_{k,j} = \tilde{u} \Big|_{x=x_{i+1/2}} + O(\Delta x^m)$$



# Конечно-объемная и конечно-разностная аппроксимации

## Конечно-разностная аппроксимация применительно к решению нелинейных уравнений

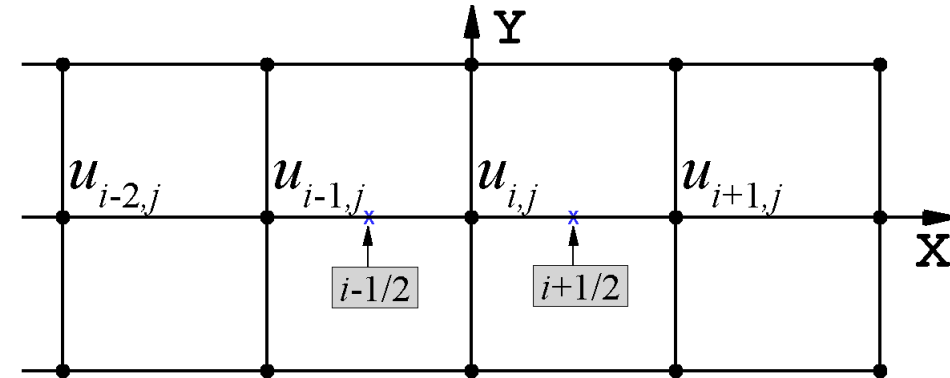
А. Одномерный случай:  $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0.$



Аппроксимация пространственной производной:

$$f_i = f(u_i) \Rightarrow \frac{\partial u_i}{\partial t} = -\frac{1}{\Delta x} \sum_k C_{i-k} f_k = -\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=x_i}^{\text{exact}} + O(\Delta x^m)$$

В. Двумерный случай:  $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f_x(u)}{\partial x} + \frac{\partial f_y(u)}{\partial y} = 0.$



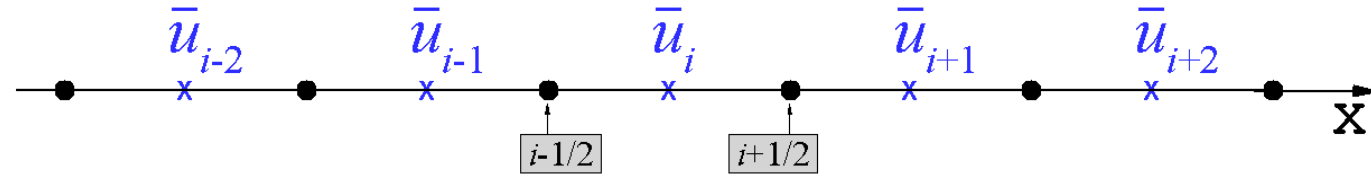
Одномерная аппроксимация вдоль оси x:

$$(f_x)_{i,j} = f_x(u_{i,j}) \Rightarrow \frac{1}{\Delta x} \sum_k C_{i-k} (f_x)_{k,j} = \frac{\partial f_x}{\partial x} \Big|_{\substack{x=x_i \\ y=y_i}}^{\text{exact}} + O(\Delta x^m)$$

# Конечно-объемная и конечно-разностная аппроксимации

## Конечно-объемная аппроксимация применительно к решению нелинейных уравнений

А. Одномерный случай:  $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0.$



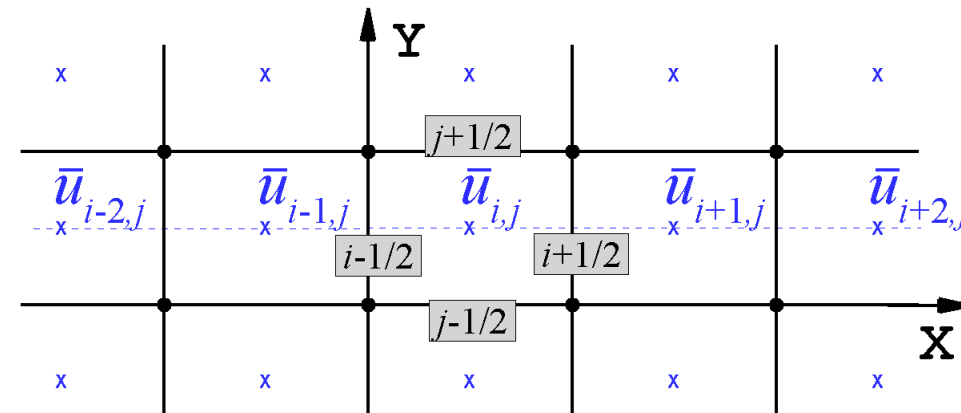
Аппроксимация на боковой грани  $i+1/2$ :  $u_{i+1/2} = \sum_k C_{i-k}^* \bar{u}_k = u|_{x=x_{i+1/2}} + O(\Delta x^m)$

Интегрирование по  $i$ -ой ячейке:

$$f_{i+1/2} = f(u_{i+1/2}) \Rightarrow \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} = -\frac{1}{\Delta x} [f_{i+1/2} - f_{i-1/2}] = \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} \right)^{\text{exact}} + O(\Delta x^m)$$

В. Двумерный случай:  $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f_x(u)}{\partial x} + \frac{\partial f_y(u)}{\partial y} = 0.$

$$\frac{\partial \bar{u}_{i,j}}{\partial t} = -\frac{1}{\Delta x} \left[ (\tilde{f}_x)_{i+1/2} - (\tilde{f}_x)_{i-1/2} \right] - \frac{1}{\Delta y} \left[ (\hat{f}_y)_{j+1/2} - (\hat{f}_y)_{j-1/2} \right]$$



Одномерная аппроксимация вдоль оси x:

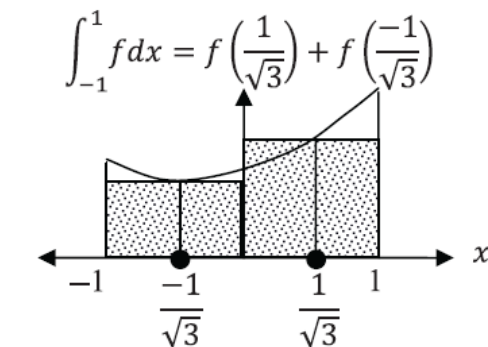
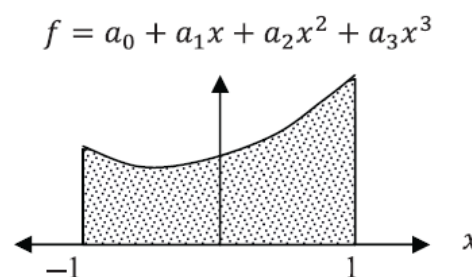
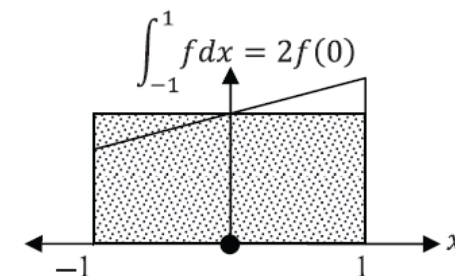
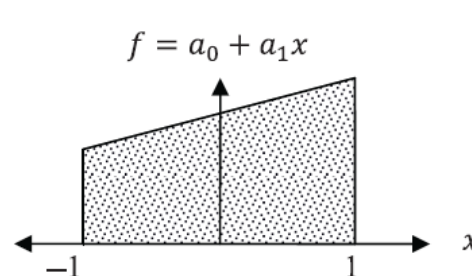
$$\tilde{u}_{i+1/2} = \sum_k C_{i-k}^* \bar{u}_{k,j} = \tilde{u}|_{x=x_{i+1/2}} + O(\Delta x^m)$$

$$f_x(\tilde{u}_{i+1/2}) = (\tilde{f}_x)_{i+1/2} + O(\Delta y^2) !!!$$

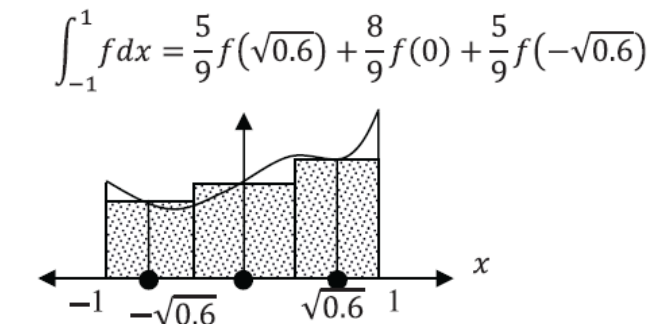
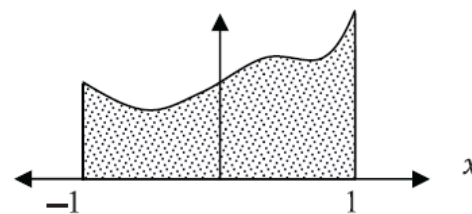
# Метод Гаусса

Метод Гаусса – метод численного интегрирования, позволяющий повысить порядок точности методов на основе интерполяционных формул путём специального выбора узлов интегрирования (*точки Гаусса*). Метод Гаусса позволяет достичь максимальной точности для данного числа узлов (точек).

*Примечание:* Если интегрируемая функция является полиномом соответствующей степени, то метод Гаусса дает точные результаты.



$f = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$



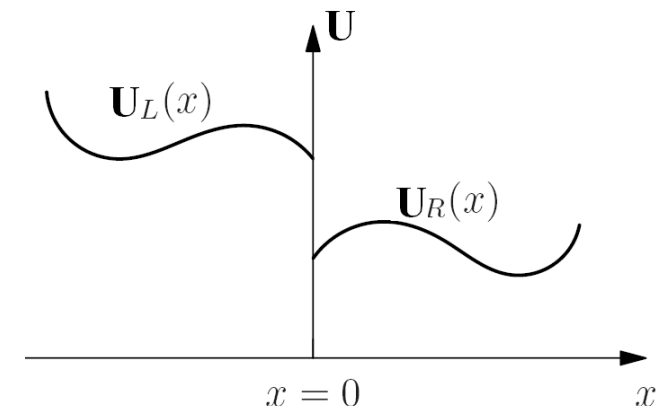
# Дискретизация по времени

## Способы достижения высокого порядка аппроксимации по времени:

### I. Приближенное решение обобщенной задачи Римана (book of Toro, Chapters 19, 20)

Задача Коши с разрывом в точке  $x = 0$ : 
$$\mathbf{U}(x, t = 0) = \begin{cases} \mathbf{U}_L(x), & \text{если } x < 0, \\ \mathbf{U}_R(x), & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

$$\mathbf{U}_L(x) = \mathbf{U}_L(0) + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k \mathbf{U}_L(0)}{\partial x^k} x^k, \quad \mathbf{U}_R(x) = \mathbf{U}_R(0) + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k \mathbf{U}_R(0)}{\partial x^k} x^k.$$



Консервативная и линеаризованная формы уравнений газовой динамики:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}(\mathbf{U}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0, \quad \mathbf{A}(\mathbf{U}) = \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}}.$$

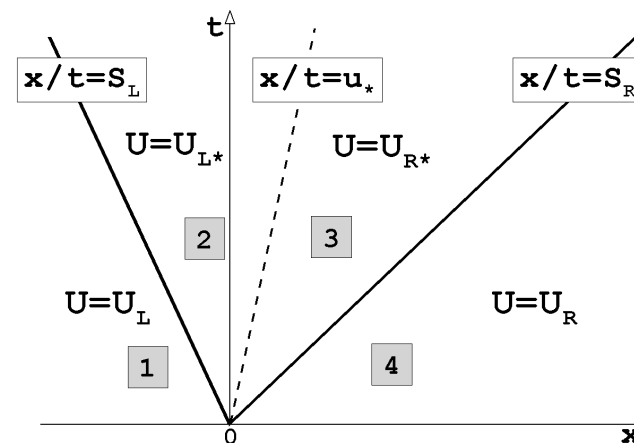
Обобщенная задача Римана: в каждой из 4-х областей  $\mathbf{U}_{LR} = \mathbf{U}_{LR}(x, t)$

На грани ячейки: 
$$\mathbf{U}_{LR}(x = 0, t) = \mathbf{U}_{LR}(0, 0) + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k \mathbf{U}_{LR}(0, 0)}{\partial t^k} t^k$$

Переход от  $\partial t$  к  $\partial x$ : 
$$\frac{\partial^k \mathbf{U}}{\partial t^k} = \mathbf{P} \left( \mathbf{U}, \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x}, \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial^k \mathbf{U}}{\partial x^k} \right)$$

Задача Коши при: 
$$\mathbf{V}(x, t = 0) = \begin{cases} \mathbf{V}_L(0), & \text{если } x < 0, \\ \mathbf{V}_R(0), & \text{если } x > 0. \end{cases}$$
 где 
$$\mathbf{V}(x, t) \equiv \frac{\partial^k \mathbf{U}(x, t)}{\partial x^k}$$

Классическая задача Римана:  
в каждой из 4-х областей  $\mathbf{U}_{LR} = \text{const}$

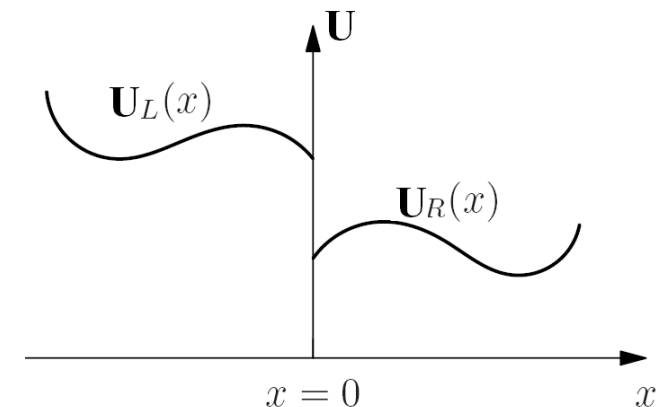


# Дискретизация по времени

## Способы достижения высокого порядка аппроксимации по времени:

### II. Методы Рунге-Кутты

Многостадийные методы с решением классической задачи Римана с начальным разрывом функции:  $\mathbf{U}(x, t = 0) = \begin{cases} \mathbf{U}_L(0), & \text{если } x < 0, \\ \mathbf{U}_R(0), & \text{если } x > 0. \end{cases}$



Метод Рунге-Кутты второго порядка (RK2):

$$\mathbf{U}_i^{(1)} = \mathbf{U}_i^n + \Delta t \mathbf{L}_i(\mathbf{Q}^n),$$

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \frac{1}{2} \left[ \mathbf{U}_i^n + \mathbf{U}_i^{(1)} + \Delta t \mathbf{L}_i(\mathbf{Q}^{(1)}) \right].$$

Метод Рунге-Кутты третьего порядка (RK3):

$$\mathbf{U}_i^{(1)} = \mathbf{U}_i^n + \Delta t \mathbf{L}_i(\mathbf{Q}^n),$$

$$\mathbf{U}_i^{(2)} = \frac{1}{4} \left[ 3\mathbf{U}_i^n + \mathbf{U}_i^{(1)} + \Delta t \mathbf{L}_i(\mathbf{Q}^{(1)}) \right],$$

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \frac{1}{3} \left[ \mathbf{U}_i^n + 2\mathbf{U}_i^{(2)} + 2\Delta t \mathbf{L}_i(\mathbf{Q}^{(2)}) \right].$$

$\mathbf{L}_i(\mathbf{Q})$  – пространственный оператор (суммарный вектор потока через все боковые грани i-й ячейки).

Зависимость погрешности расчета от сетки

Метод RK2:  $\varepsilon \approx (C_{CFL})^2 \cdot O(\Delta x^2) + O(\Delta x^m)$

Метод RK3:  $\varepsilon \approx (C_{CFL})^3 \cdot O(\Delta x^3) + O(\Delta x^m)$

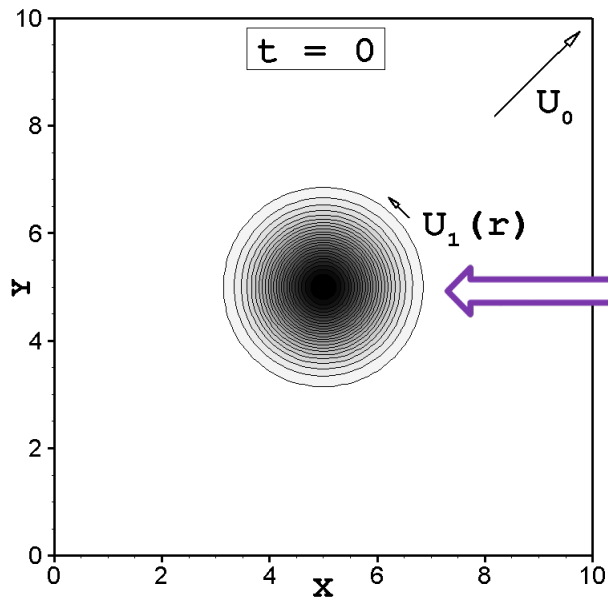
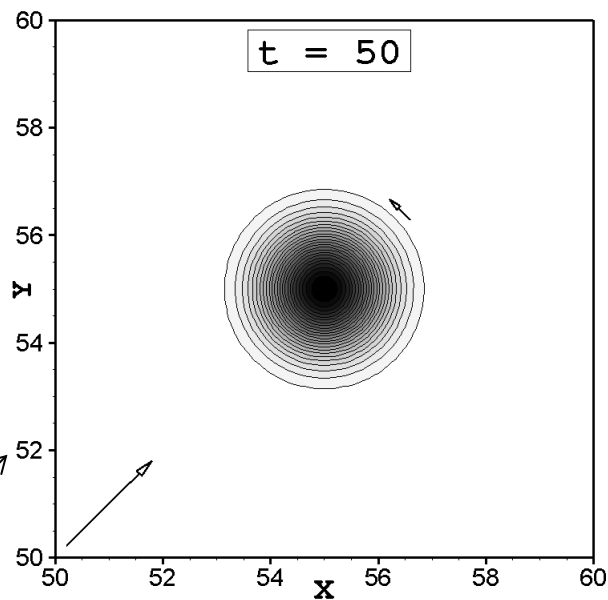
The third-order Runge–Kutta method, while linearly stable up to a CFL number of 1.43, is TVD ... for much smaller numbers. We will use the commonly employed value of 0.6 for all of our results presented here.

- ❑ **Greenough J.A., Rider W.J.** A quantitative comparison of numerical methods for the compressible Euler equations: fifth-order WENO and piecewise-linear Godunov// J. Comp. Phys., **2004**

# Дискретизация по времени (методы Рунге-Кутты)

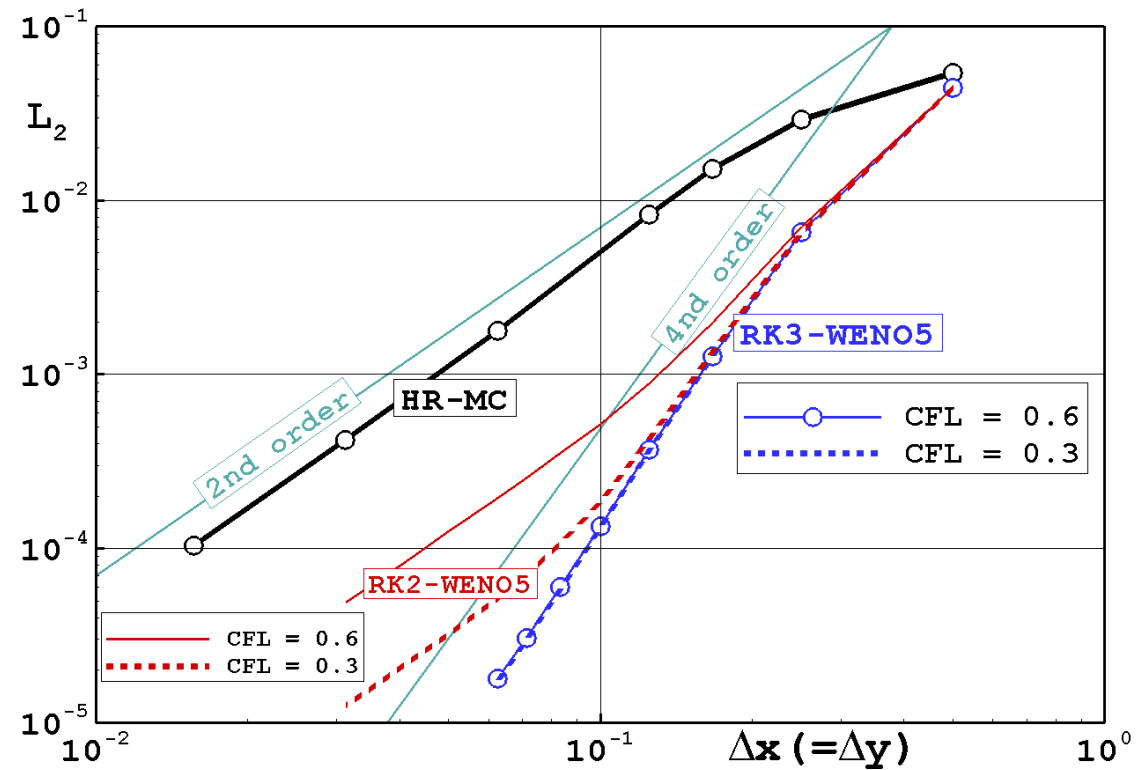
## Тестовая задача о диагональном переносе изоэнтропического вихря

Диагональный перенос  
 $\mathbf{U}_0 = (1, 1)$



Вращение относительно центра  

$$\mathbf{U}_1(r) = \frac{5}{2\pi} \exp\left(\frac{1-r^2}{2}\right) (-\bar{y}, \bar{x})$$



Погрешность расчета по норме  $L_2$  для различных методов в зависимости от сеточного разрешения

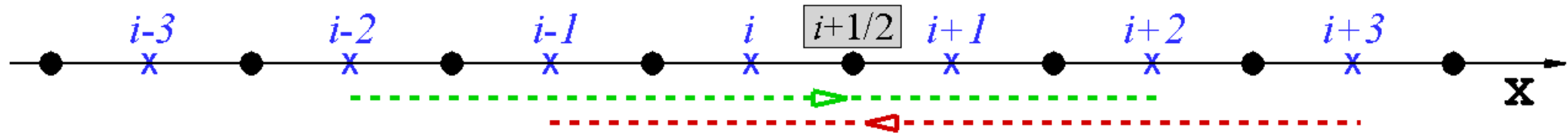
**RK3-WENO5:**  $\varepsilon \approx (C_{CFL})^3 \cdot O(\Delta x^3) + O(\Delta x^m)$

**RK2-WENO5:**  $\varepsilon \approx (C_{CFL})^2 \cdot O(\Delta x^2) + O(\Delta x^m)$

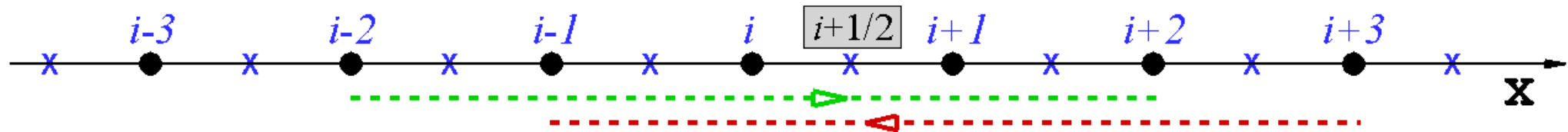
# Решение классической задачи Римана

## Решатели задачи Римана в схемах повышенной точности

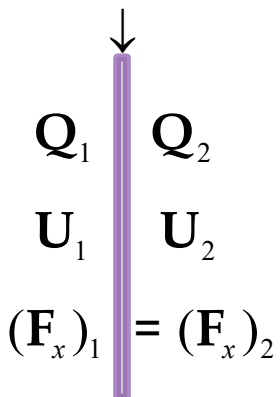
I. Конечно-объемная аппроксимация: применяется к консервативным величинам



II. Конечно-разностная аппроксимация: применяется к потоковым величинам (расщепление)



стационарная ударная волна



Вектор потока Лакса-Фридрихса:

$$\mathbf{F}_* = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_L + \mathbf{F}_R) - \frac{1}{2}S^{\max}(\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L) = \mathbf{F}^+(\mathbf{U}_L) + \mathbf{F}^-(\mathbf{U}_R), \text{ где } \mathbf{F}^\pm(\mathbf{U}) = \frac{1}{2}(\mathbf{F}(\mathbf{U}) \pm S^{\max}\mathbf{U})$$

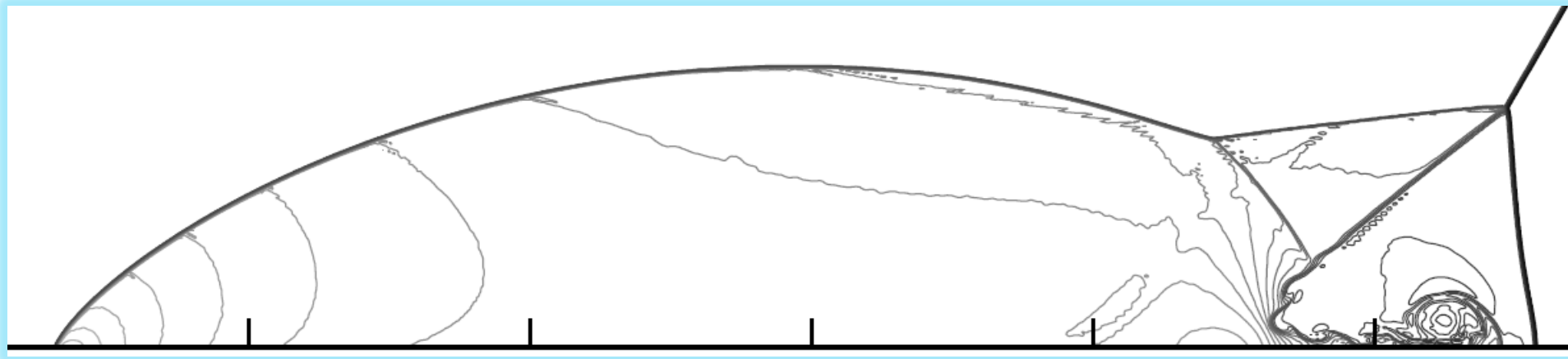
### 3.2 Finite Difference Schemes

... A very popular flux splitting is the Lax–Friedrichs splitting.

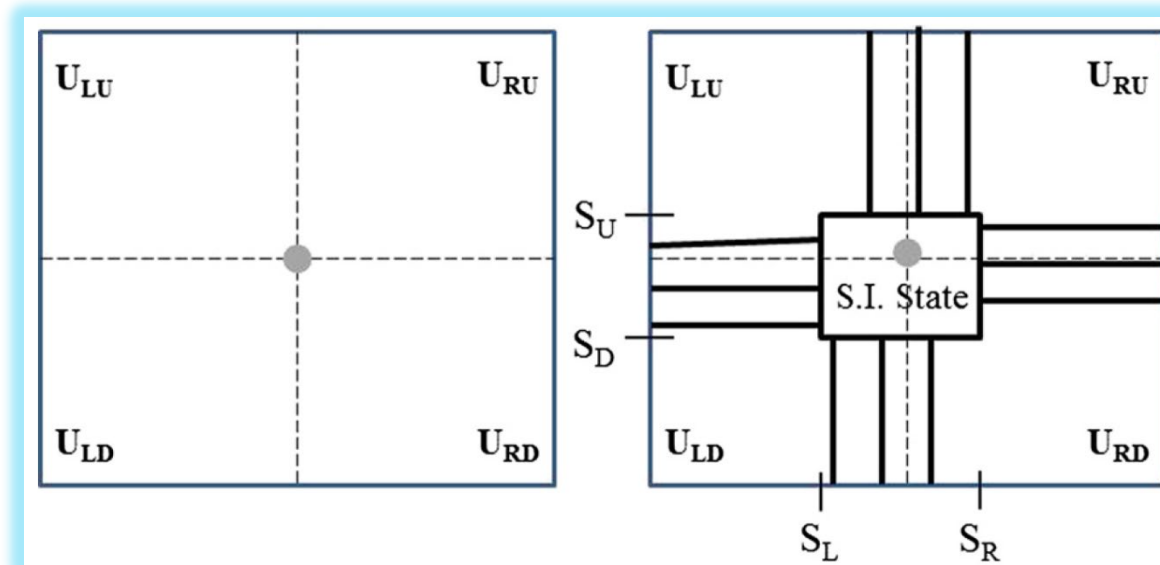
конец первой части

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ

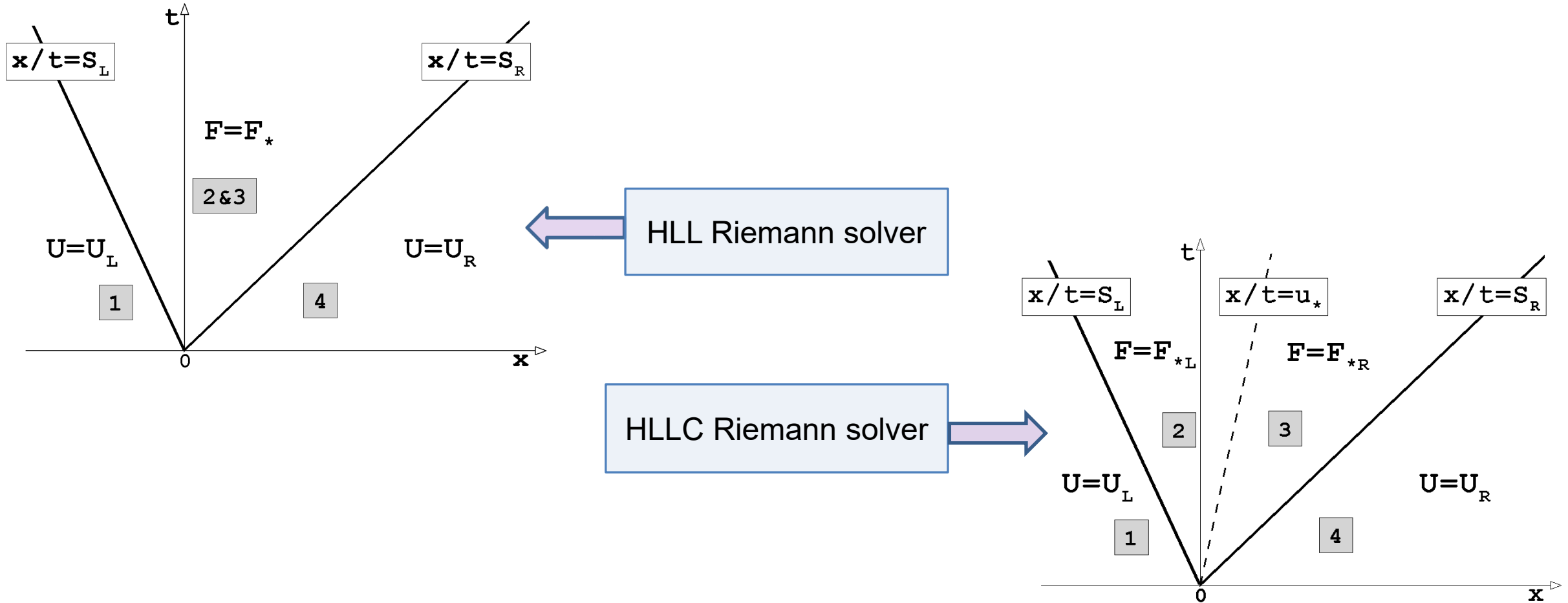
□ **Balsara D.S. Multidimensional Riemann problem** with self-similar internal structure. Part I – Application to hyperbolic conservation laws on structured meshes // J. Comp. Phys., **2014**



In Fig. 10 we show the density variable from a  $1920 \times 480$  zone simulation of the double Mach reflection problem which was run using a third order accurate ADER-WENO scheme with a CFL of 0.8. The multidimensional HLLC Riemann solver with linear variation was used.



□ **Harten A., Lax P. D., van Leer B.** On upstream differencing and Godunov-type schemes for ... // SIAM Review, **1983**



□ **Toto E.F., Spruce M., Speares W.** Restoration of the contact surface in the HLL-Riemann solver // Technical Report CoA-9204, College of Aeronautics, Cranfield Institute of Technology, UK, **1992** ; Shock Waves, **1994**

□ **Balsara D.S. Multidimensional Riemann problem** with self-similar internal structure. Part I – Application to hyperbolic conservation laws on structured meshes // J. Comp. Phys., **2014**

