

Схемы типа Годунова в вычислительной газовой динамике

IX. Схемы повышенной точности: цена вопроса
(часть 2)

Родионов Александр Владимирович



Схемы первого порядка аппроксимации

- постоянные параметры газа внутри ячейки
- использование примитивных переменных: $Q_i^n = Q(U_i^n)$
- задача Римана решается точно (базовая схема Годунова) или приближенно (схемы Роу, HLL, ...)
- интегрирование по времени – одношаговый метод Эйлера

Эволюция схем типа Годунова

Схемы второго порядка аппроксимации

- линейное распределение параметров газа внутри ячейки*
- использование примитивных переменных: $\mathbf{Q}_i^n \approx \mathbf{Q}(\mathbf{U}_i^n)$ (с точностью до членов второго порядка малости)
- одномерная реконструкция по примитивным или консервативным переменным (расчет $\Delta\mathbf{Q}$ или $\Delta\mathbf{U}$)
- нелинейные ограничители (с переходом к характеристическим переменным и обратно)**
- решение задачи Римана – как в схемах первого порядка
- интегрирование по времени – методы типа MUSCL-Hancock или метод Рунге-Кутты (RK2)

* Распределение параметров вдоль направления, совпадающего с осью x

$$\mathbf{Q}(x) = \mathbf{Q}_i + \Delta\mathbf{Q}_i \cdot (x - x_i) / \Delta x \quad \text{или} \quad \mathbf{U}(x) = \mathbf{U}_i + \Delta\mathbf{U}_i \cdot (x - x_i) / \Delta x$$

** Матрицы перехода от вектора *примитивных* переменных к вектору *характеристических* переменных и обратно (двумерный случай, реконструкция вдоль направления, совпадающего с осью x)

$$\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/\rho a \\ 1 & 0 & 0 & -1/\rho a \\ 0 & 0 & 1 & -1/a^2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ \rho/2a & -\rho/2a & 1 & 0 \\ \rho a/2 & -\rho a/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Эволюция схем типа Годунова

Схемы повышенного порядка (конечно-объемная аппроксимация)

- средние по ячейкам консервативные величины \mathbf{U}
- переход от \mathbf{U} к характеристическим переменным \mathbf{Z} (проекция на собственные векторы матрицы Якоби)*
- аппроксимация проекций на грань $i+1/2$: \mathbf{Z}_L и \mathbf{Z}_R (в многомерных задачах – в точки Гаусса)
- обратный переход от проекций \mathbf{Z}_L и \mathbf{Z}_R к \mathbf{U}_L и \mathbf{U}_R
- решение задачи Римана и вычисление потока (в многомерных задачах – суммирование по точкам Гаусса)
- интегрирование по времени – методы Рунге-Кутты (RK3)

* Матрицы перехода от вектора *консервативных* переменных к вектору *характеристических* переменных и обратно (двумерный случай, аппроксимация вдоль направления, совпадающего с осью x)

$$\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \mathbf{U}} = \mathbf{L} = \begin{bmatrix} (b_2 + u_x / a) / 2 & -(b_1 u_x + 1 / a) / 2 & -b_1 u_y / 2 & b_1 / 2 \\ 1 - b_2 & b_1 u_x & b_1 u_y & -b_1 \\ (b_2 - u_x / a) / 2 & -(b_1 u_x - 1 / a) / 2 & -b_1 u_y / 2 & b_1 / 2 \\ -u_y & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{Z}} = \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ u_x - a & u_x & u_x + a & 0 \\ u_y & u_y & u_y & 1 \\ h_0 - a u_x & u^2 / 2 & h_0 + a u_x & u_y \end{bmatrix},$$

где $u^2 = u_x^2 + u_y^2$, $b_1 = (\gamma - 1) / a^2$, $b_2 = b_1 u^2 / 2$, $h_0 = u^2 / 2 + 1 / b_1$.

Для гиперболических систем уравнений:

$$\mathbf{A} = \partial \mathbf{F}_x / \partial \mathbf{U} = \mathbf{R} \mathbf{\Lambda} \mathbf{L}, \quad \mathbf{R} \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdot \\ 0 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdot \\ 0 & \lambda_2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}.$$

Правые и левые собственные вектора:

$$\mathbf{A} \mathbf{r}^{(j)} = \lambda_j \mathbf{r}^{(j)}, \quad \mathbf{l}^{(i)} \mathbf{A} = \lambda_i \mathbf{l}^{(i)}.$$

Эволюция схем типа Годунова

Схемы повышенного порядка (конечно-разностная аппроксимация)

- консервативные переменные \mathbf{U} в узлах сетки
- расчет потоковых переменных \mathbf{F}_x
- проекция \mathbf{U} и \mathbf{F}_x на собственные векторы матрицы Якоби (результат – векторы \mathbf{u} и \mathbf{f}_x)
- расщепление проекций потока: $\mathbf{f}_x = \mathbf{f}_x^- + \mathbf{f}_x^+$
- аппроксимация расщепленных проекций потоков на условную грань $i+1/2$: $(\mathbf{f}_x^+)_L$ и $(\mathbf{f}_x^-)_R$
- суммирование проекций потоков $\mathbf{f}_x = (\mathbf{f}_x^+)_L + (\mathbf{f}_x^-)_R$
- обратный переход от \mathbf{f}_x к вектору потока \mathbf{F}_x на грани $i+1/2$
- интегрирование по времени – методы Рунге-Кутты (RK3)

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_x(\mathbf{U})}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{R} \Lambda \mathbf{L} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{L} \mathbf{U}}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial \mathbf{L} \mathbf{U}}{\partial x} = 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{F}_x}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{F}_x}{\partial t} + \mathbf{R} \Lambda \mathbf{L} \frac{\partial \mathbf{F}_x}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{L} \mathbf{F}_x}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial \mathbf{L} \mathbf{F}_x}{\partial x} = 0$$

□ **Balsara D.S., Shu C-W.** Monotonicity preserving Weighted Essentially Non-Oscillatory schemes with increasingly high order of accuracy // J. Comp. Phys., **2000**

$$\mathbf{f}_x^\pm(\mathbf{U}) = \frac{1}{2}(\mathbf{f}_x \pm \lambda \mathbf{u})$$

Реконструкции семейства ENO (Essentially Non-Oscillatory)

- ❑ **Harten A., Osher S.** Uniformly high-order accurate nonoscillatory schemes. I // SIAM J. Numer. Anal., **1987**
- ❑ **Harten A., Engquist B., Osher S. Chakravarthy S.R.** Uniformly high-order accurate non-oscillatory schemes. III // J. Comp. Phys., **1987**

Реконструкция полиномиальной функции внутри ячейки

$$u(x) = \sum_{k=0}^{m-1} C_k \left(\frac{x - x_i}{\Delta x} \right)^k \quad \text{в интервале } x_i - \Delta x / 2 < x < x_i + \Delta x / 2$$

- I. Реконструкция через первообразную функцию (**RP** = Reconstruction via a Primitive function)

$$w(x) = \int_{x_0}^x u(x') dx'$$

$$w(x_{i+1/2}) - w(x_{i-1/2}) = \bar{u}_i \Delta x$$

$$w(x) = \hat{C}_0 + \sum_{k=1}^m \hat{C}_k \left(\frac{x - x_i}{\Delta x} \right)^k$$

⇓

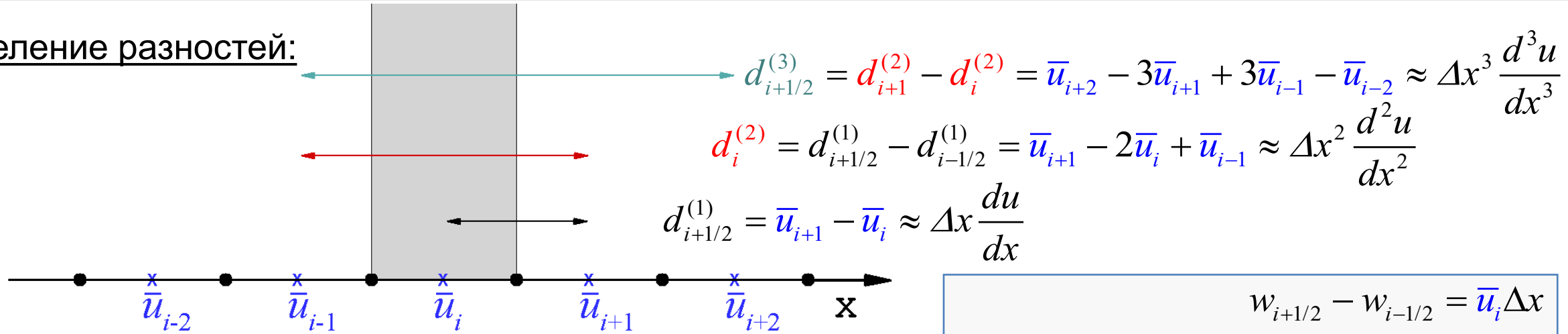
$$\frac{dw(x)}{dx} = u(x) \Rightarrow C_k = \frac{(k+1)}{\Delta x} \hat{C}_{k+1}$$

- II. Реконструкция через деконволюцию (**RD** = Reconstruction via Deconvolution)

$$\bar{u}_i = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x) dx = u|_{x=x_i} + \frac{\Delta x^2}{2^2 \cdot 3!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x=x_i} + \frac{\Delta x^4}{2^4 \cdot 5!} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \Big|_{x=x_i} + \dots$$

Реконструкции семейства ENO (вариант RP)

Определение разностей:



I. Реконструкция через первообразную функцию (RP)

m = 1 Линейная аппроксимация $w(x)$ между точками: $(i-1/2, i+1/2)$

$$w(x) = w_{i-1/2} + \frac{w_{i+1/2} - w_{i-1/2}}{\Delta x} (x - x_{i-1/2}) \Rightarrow u(x) = \bar{u}_i$$

$$\begin{aligned} w_{i+1/2} - w_{i-1/2} &= \bar{u}_i \Delta x \\ w_{i+3/2} - 2w_{i+1/2} + w_{i-1/2} &= d_{i+1/2}^{(1)} \Delta x \\ w_{i+3/2} - 3w_{i+1/2} + 3w_{i-1/2} - w_{i-3/2} &= d_i^{(2)} \Delta x \\ &\dots \end{aligned}$$

m = 2 Квадратичная аппроксимация $w(x)$ между тремя точками: $(i-3/2, i-1/2, i+1/2)$ или $(i-1/2, i+1/2, i+3/2)$

$$u(x) = \bar{u}_i + d^{(1)} \left(\frac{x - x_i}{\Delta x} \right), \quad d^{(1)} = \begin{cases} d_{i-1/2}^{(1)}, & \text{если } |d_{i-1/2}^{(1)}| < |d_{i+1/2}^{(1)}| \\ d_{i+1/2}^{(1)}, & \text{если } |d_{i-1/2}^{(1)}| > |d_{i+1/2}^{(1)}| \end{cases} \equiv \text{minmod}_K (d_{i-1/2}^{(1)}, d_{i+1/2}^{(1)})$$

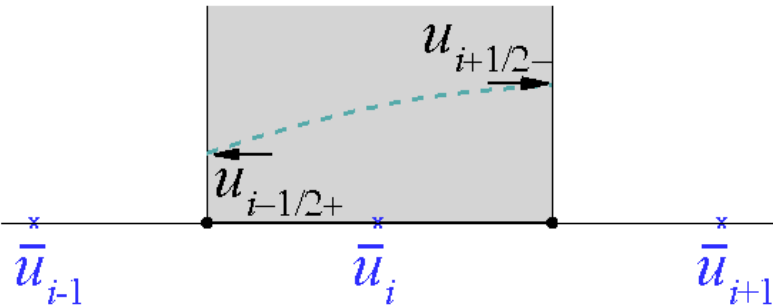
m = 3 Кубическая аппроксимация $w(x)$ между четырьмя точками: $(i-5/2, i-3/2, i-1/2, i+1/2)$ или $(i-3/2, i-1/2, i+1/2, i+3/2)$ или $(i-1/2, i+1/2, i+3/2, i+5/2)$

$$u(x) = \bar{u}_i - \frac{1}{24} d^{(2)} + d^{(1)} \left(\frac{x - x_i}{\Delta x} \right) + \frac{1}{2} d^{(2)} \left(\frac{x - x_i}{\Delta x} \right)^2, \quad d^{(2)} = \begin{cases} \text{minmod}_K (d_{i-1}^{(2)}, d_i^{(2)}) \\ \text{minmod}_K (d_i^{(2)}, d_{i+1}^{(2)}) \end{cases}, \quad d^{(1)} = \begin{cases} d_{i-1/2}^{(1)} + d^{(2)} / 2 \\ d_{i+1/2}^{(1)} - d^{(2)} / 2 \end{cases}$$

Реконструкции семейства ENO (вариант RP)

Использование реконструкций ENO (RP-вариант) в сочетании с методами Рунге-Кутты

Таблица коэффициентов $C_k^{m,s}$ для расчета $u_{i+1/2-}$



		$k = -4$	-3	-2	-1	0	$+1$	$+2$	$+3$	$+4$
m	s	u_{i-4}	u_{i-3}	u_{i-2}	u_{i-1}	u_i	u_{i+1}	u_{i+2}	u_{i+3}	u_{i+4}
1	0					1				
2	$-1/2$				$-1/2$	$3/2$				
	$+1/2$					$1/2$	$1/2$			
3	-1			$1/3$	$-7/6$	$11/6$				
	0				$-1/6$	$5/6$	$1/3$			
	$+1$					$1/3$	$5/6$	$-1/6$		
4	$-3/2$		$-1/4$	$13/12$	$-23/12$	$25/12$				
	$-1/2$			$1/12$	$-5/12$	$13/12$	$1/4$			
	$+1/2$				$-1/12$	$7/12$	$7/12$	$-1/12$		
	$+3/2$					$1/4$	$13/12$	$-5/12$	$1/12$	
5	-2	$1/5$	$-21/20$	$137/60$	$-163/60$	$137/60$				
	-1		$-1/20$	$17/60$	$-43/60$	$77/60$	$1/5$			
	0			$1/30$	$-13/60$	$47/60$	$9/20$	$-1/20$		
	$+1$				$-1/20$	$9/20$	$47/60$	$-13/60$	$1/30$	
	$+2$					$1/5$	$77/60$	$-43/60$	$17/60$	$-1/20$

Значения полиномиальной функции $u(x)$ на границах i -й ячейки:

$$u_{i+1/2-} = \sum_k C_k^{m,s} \bar{u}_{i+k}$$

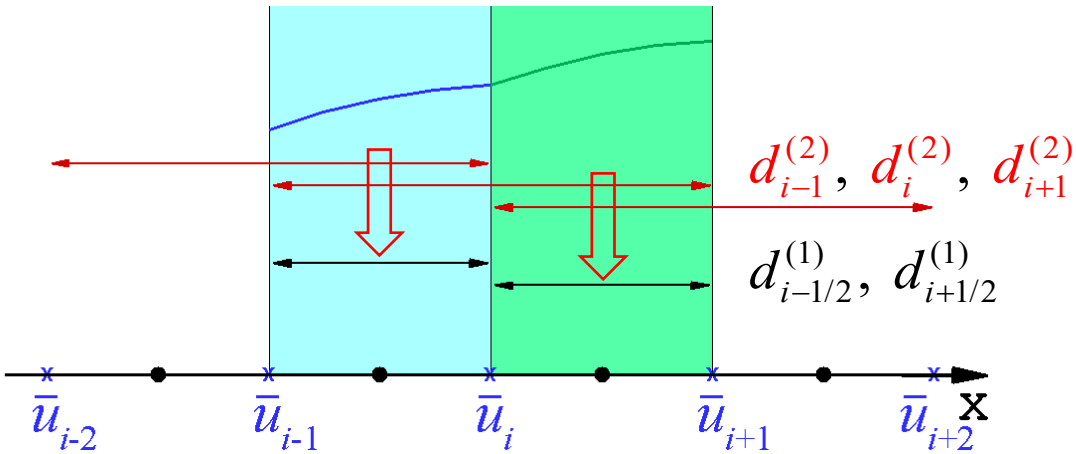
$$u_{i-1/2+} = \sum_k C_{-k}^{m,-s} \bar{u}_{i+k}$$

❑ **Shu C-W.** Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes for hyperbolic conservation laws // ICASE Report No. 97-65, **1997**

Реконструкции семейства ENO (вариант RD)

II. Реконструкция через деконволюцию (RD = Reconstruction via Deconvolution)

Схема ENO2RD (линейная функция внутри ячейки): $u(x) = \bar{u}(x) = C_0 + C_1 \left(\frac{x - x_i}{\Delta x} \right)$, где $C_0 = \bar{u}_i$, $C_1 = d^{(1)}$



Вариант RD(A): $d^{(1)} = \min\text{mod} \left(d_{i+1/2}^{(1)}, d_{i-1/2}^{(1)} \right)$

Вариант RD(B): $d^{(1)} = \min\text{mod} \left(d_{i+1/2}^{(1)} - \frac{1}{2} d_{i+1/2}^{(2)}, d_{i-1/2}^{(1)} + \frac{1}{2} d_{i-1/2}^{(2)} \right)$

$$d_{i+1/2}^{(2)} = \min\text{mod}_K \left(d_i^{(2)}, d_{i+1}^{(2)} \right) \equiv \begin{cases} d_i^{(2)}, & \text{если } |d_i^{(2)}| < |d_{i+1}^{(2)}|, \\ d_{i+1}^{(2)}, & \text{если } |d_i^{(2)}| > |d_{i+1}^{(2)}|. \end{cases}$$

Схема ENO3RD (парабола внутри ячейки):

$$u(x) = \bar{u}(x) - \frac{1}{12} C_2 = C_0 + C_1 \left(\frac{x - x_i}{\Delta x} \right) + C_2 \left(\frac{x - x_i}{\Delta x} \right)^2, \text{ где } C_0 = \bar{u}_i - \frac{1}{24} d^{(2)}, C_1 = d^{(1)}, C_2 = \frac{1}{2} d^{(2)}$$

Вариант RD(A): $d^{(1)} = \min\text{mod} \left(d_{i+1/2}^{(1)} - \frac{1}{2} d_{i+1/2}^{(2)}, d_{i-1/2}^{(1)} + \frac{1}{2} d_{i-1/2}^{(2)} \right)$, $d^{(2)} = \min\text{mod} \left(d_{i+1/2}^{(2)}, d_{i-1/2}^{(2)} \right)$

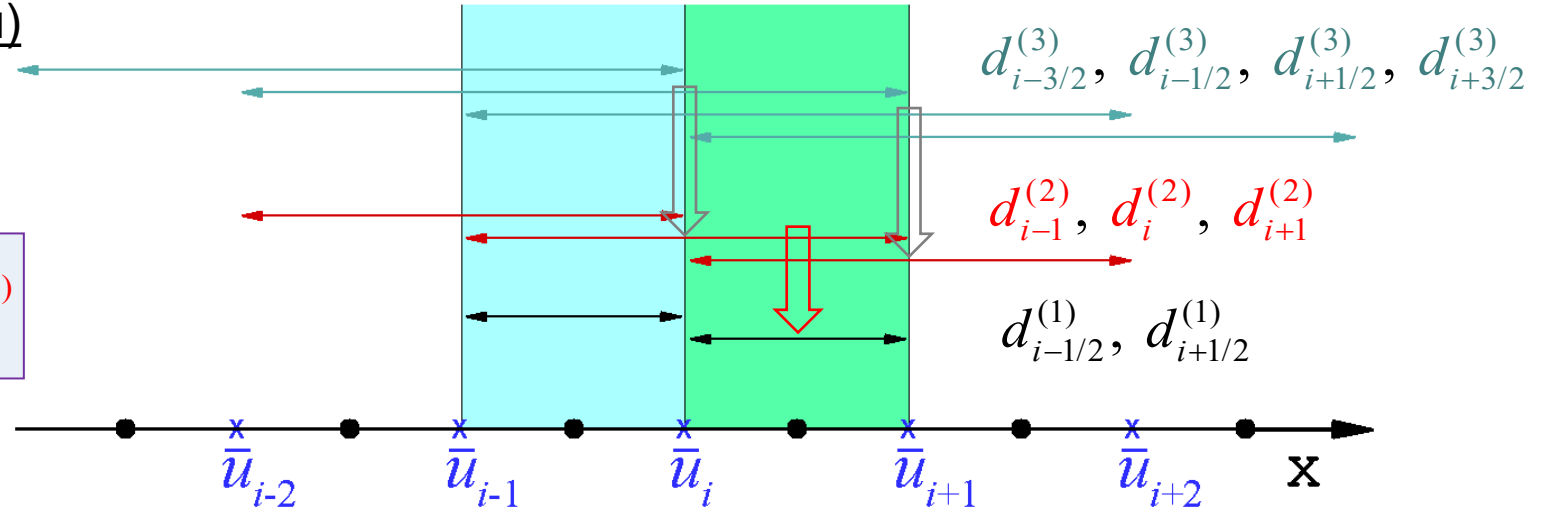
Вариант RD(B): $d^{(1)} = \min\text{mod} \left(d_{i+}^{(1)}, d_{i-}^{(1)} \right)$, $d^{(2)} = \min\text{mod} \left(d_{i+}^{(2)}, d_{i-}^{(2)} \right)$

Реконструкции семейства ENO (вариант RD)

Схема ENO3RD (парабола внутри ячейки)

$$u(x) = C_0 + C_1 \left(\frac{x - x_i}{\Delta x} \right) + C_2 \left(\frac{x - x_i}{\Delta x} \right)^2$$

$$C_0 = \bar{u}_i - \frac{1}{24} d^{(2)}, \quad C_1 = d^{(1)}, \quad C_2 = \frac{1}{2} d^{(2)}$$



Вариант В: $d^{(1)} = \min\text{mod} \left(d_{i+}^{(1)}, d_{i-}^{(1)} \right), \quad d^{(2)} = \min\text{mod} \left(d_{i+}^{(2)}, d_{i-}^{(2)} \right)$

Коррекция величин с $i+$

если $|d_i^{(2)}| < |d_{i+1}^{(2)}| \Rightarrow d_{i+}^{(3)} = \min\text{mod}_K \left(d_{i+1/2}^{(3)}, d_{i-1/2}^{(3)} \right), \quad d_{i+}^{(2)} = d_i^{(2)}, \quad d_{i+}^{(1)} = d_{i+1/2}^{(1)} - \frac{1}{2} d_i^{(2)} - \frac{1}{6} d_{i+}^{(3)}$

если $|d_i^{(2)}| > |d_{i+1}^{(2)}| \Rightarrow d_{i+}^{(3)} = \min\text{mod}_K \left(d_{i+3/2}^{(3)}, d_{i+1/2}^{(3)} \right), \quad d_{i+}^{(2)} = d_{i+1}^{(2)} - d_{i+}^{(3)}, \quad d_{i+}^{(1)} = d_{i+1/2}^{(1)} - \frac{1}{2} d_{i+1}^{(2)} + \frac{1}{3} d_{i+}^{(3)}$

Коррекция величин с $i-$

если $|d_{i-1}^{(2)}| < |d_i^{(2)}| \Rightarrow d_{i-}^{(3)} = \min\text{mod}_K \left(d_{i-1/2}^{(3)}, d_{i-3/2}^{(3)} \right), \quad d_{i-}^{(2)} = d_{i-1}^{(2)} + d_{i-}^{(3)}, \quad d_{i-}^{(1)} = d_{i-1/2}^{(1)} + \frac{1}{2} d_{i-1}^{(2)} + \frac{1}{3} d_{i-}^{(3)}$

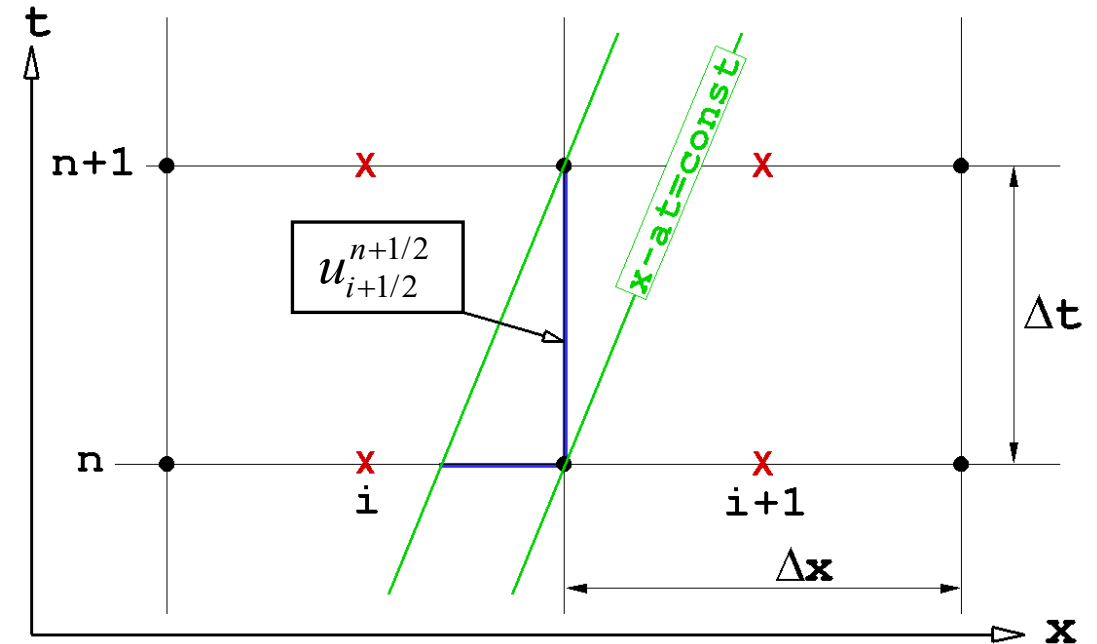
если $|d_{i-1}^{(2)}| > |d_i^{(2)}| \Rightarrow d_{i-}^{(3)} = \min\text{mod}_K \left(d_{i+1/2}^{(3)}, d_{i-1/2}^{(3)} \right), \quad d_{i-}^{(2)} = d_i^{(2)}, \quad d_{i-}^{(1)} = d_{i-1/2}^{(1)} + \frac{1}{2} d_i^{(2)} - \frac{1}{6} d_{i-}^{(3)}$

Схемы семейства ENO: численное решение линейного уравнения переноса

Уравнение переноса: $\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ при $a = \text{const} > 0$

Реконструкции в схемах второго и третьего порядка:

схема	шаблон
ENO2RP	3 точки minmod _K
ENO2RD(A)	3 точки minmod
ENO2RD(B)	5 точек UNO2
ENO3RP	5 точек
ENO3RD(A)	5 точек
ENO3RD(B)	7 точек



Поток через грань ячейки в случае решения обобщенной задачи Римана:

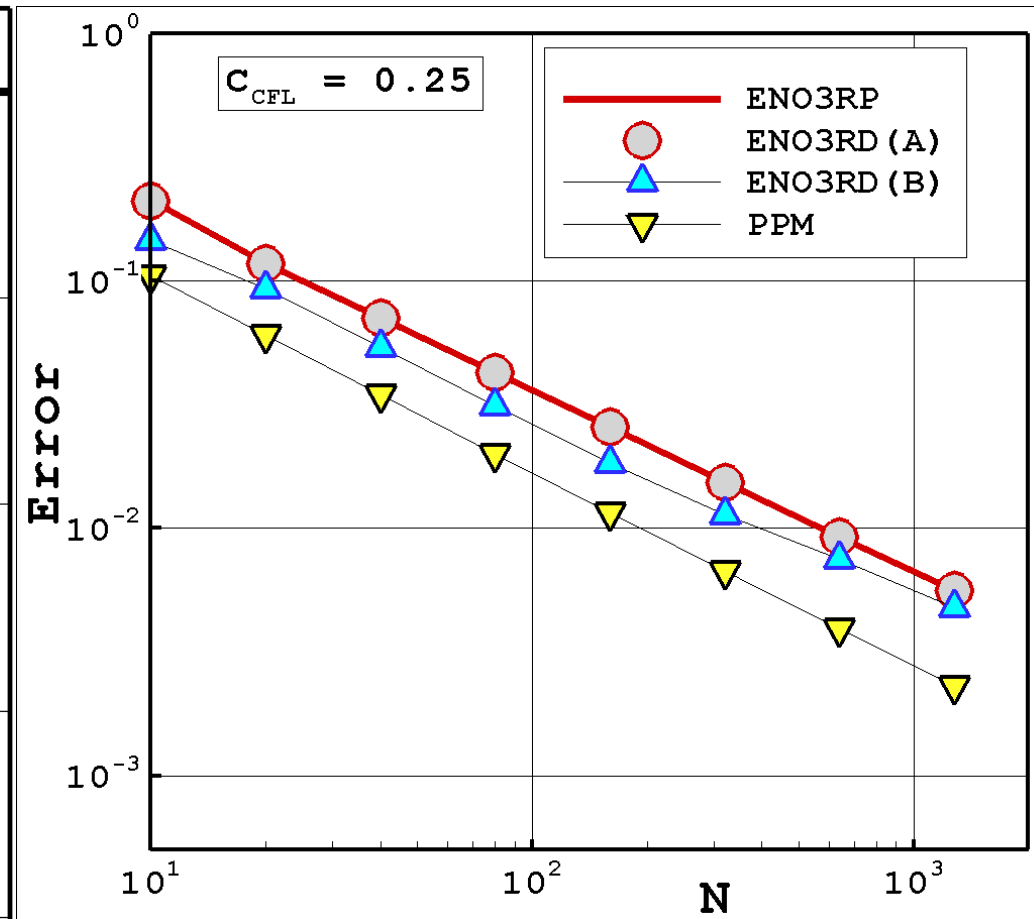
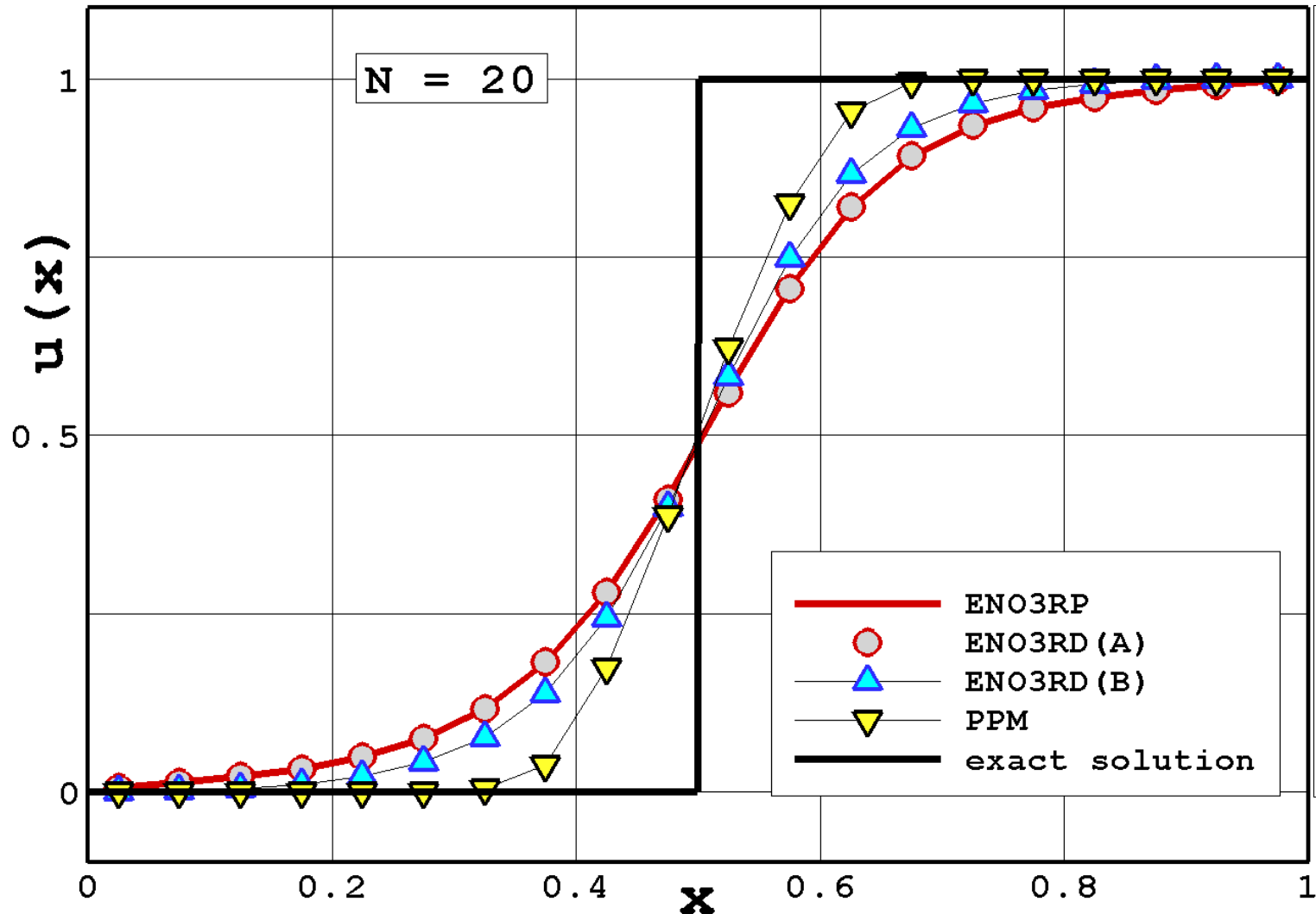
$$u_{i+1/2}^{n+1/2} = u_i^n + \frac{(1 - C_{CFL})}{2} d^{(1)} + \frac{(1 - C_{CFL})(1 - 2C_{CFL})}{12} d^{(2)}$$

□ **Harten A., Engquist B., Osher S. Chakravarthy S.R.** Uniformly high-order accurate ... III // J. Comp. Phys., **1987**

□ **Colella P., Woodward P.R.** The piecewise parabolic method (PPM) for ... // J. Comp. Phys., v.54, 174-201, **1984**

Схемы третьего порядка с реконструкциями ENO3 и PPM

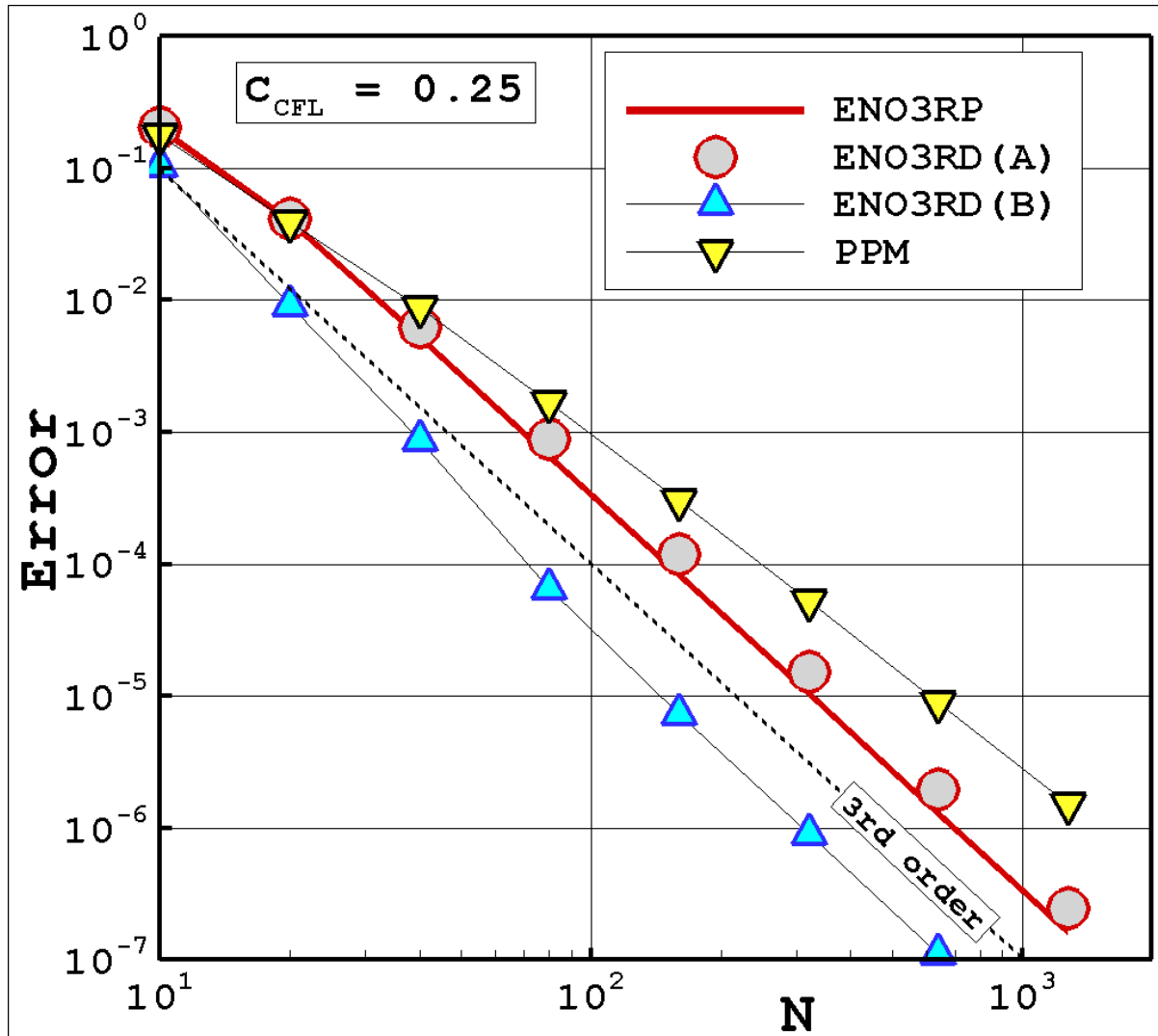
Численное решение линейного уравнения переноса:
ступенчатая функция $u(x)$ с разрывом профиля



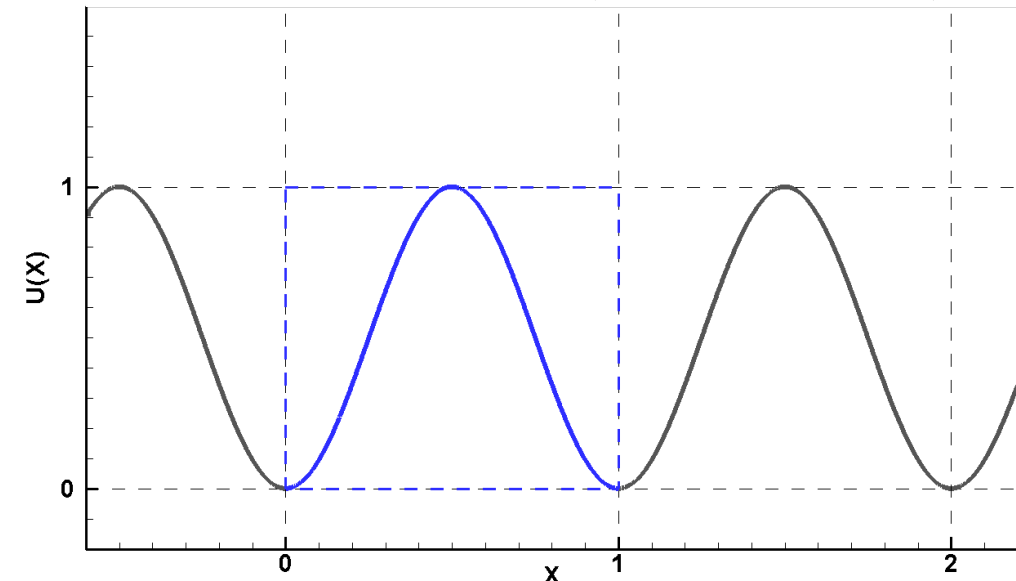
Параметры тестовой задачи:
 $a = 1, t = 10, C_{CFL} = 0.25$

Схемы третьего порядка с реконструкциями ENO3 и PPM

Численное решение линейного уравнения переноса:
периодическая функция $u(x)$ с гладким профилем



$$u_0(x) = \sin^2(\pi x) \equiv (1 - \cos(2\pi x)) / 2$$



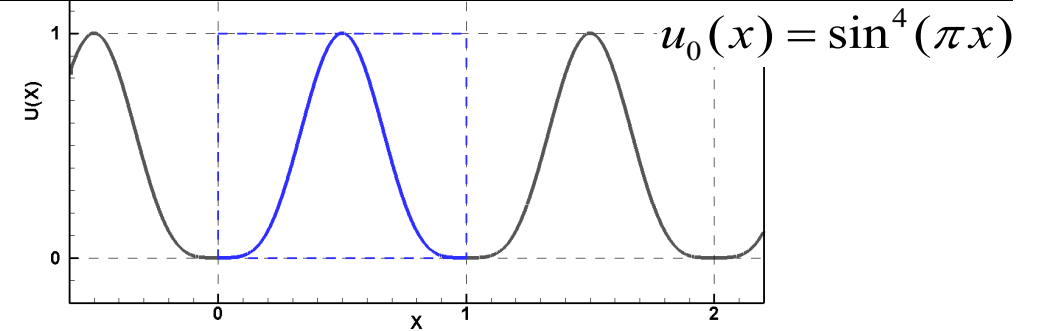
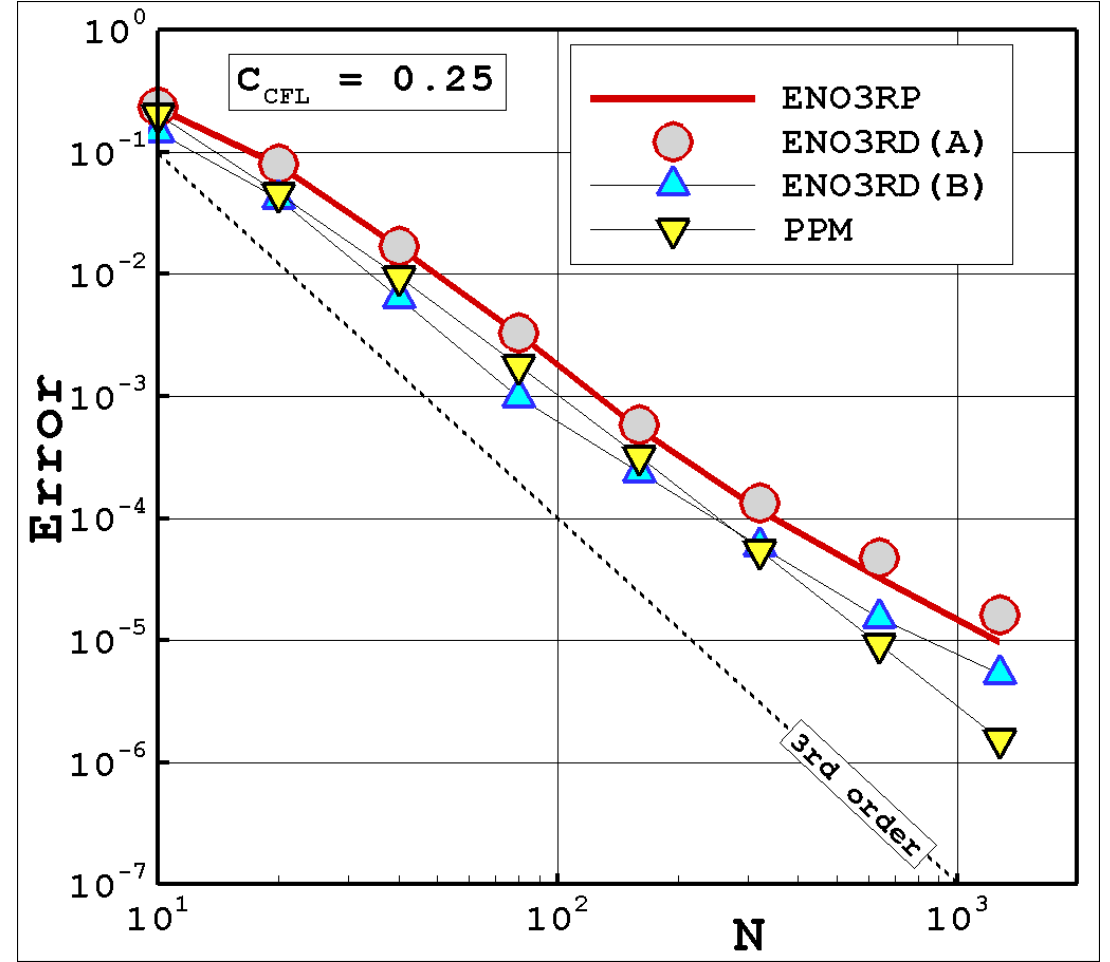
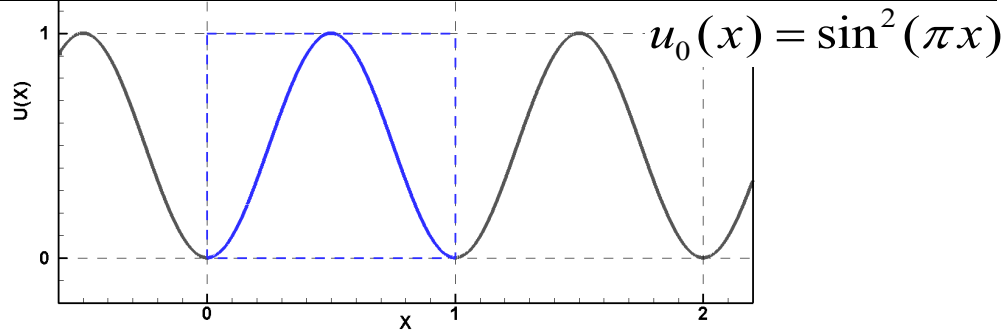
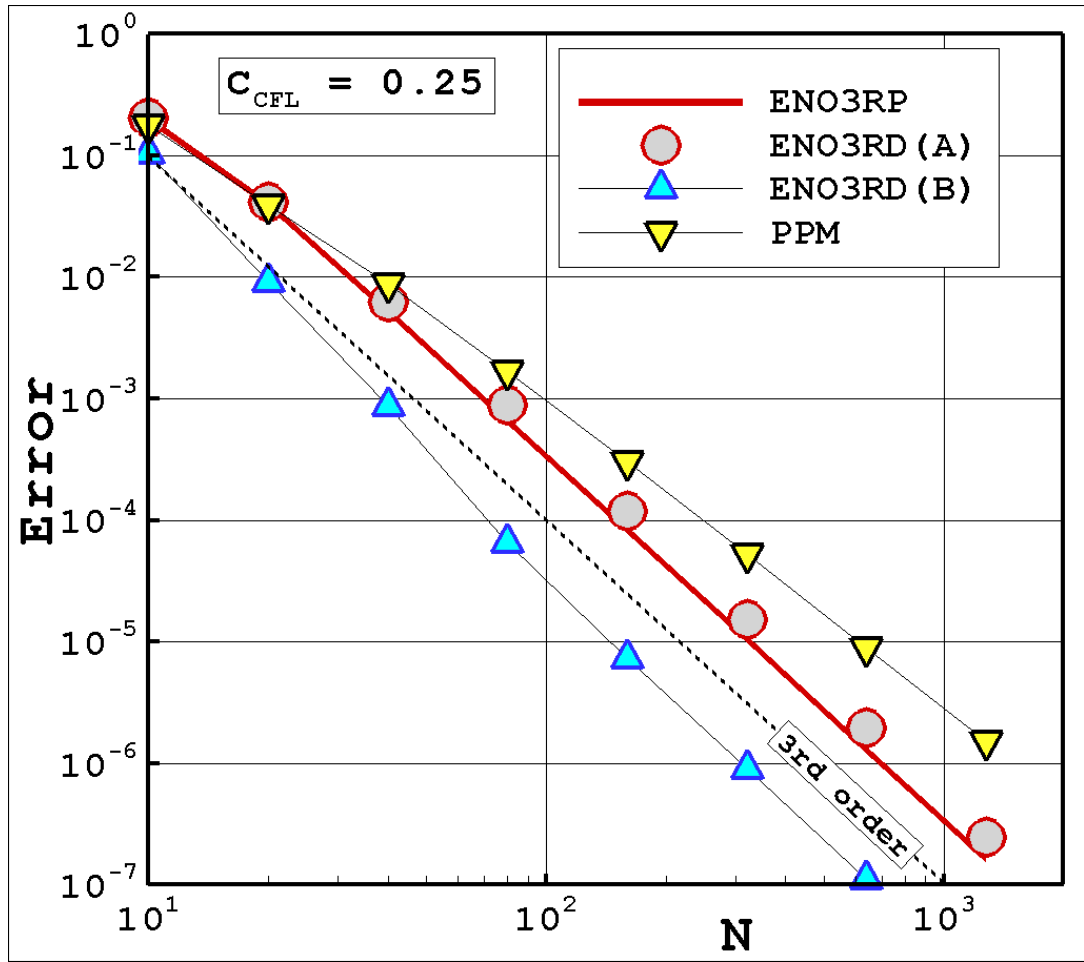
$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Параметры тестовой задачи:

$$a = 1, t = 10$$

$$C_{CFL} = 0.25$$

Схемы третьего порядка с реконструкциями ENO3 и PPM



конец второй части

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ

Решатели, базирующиеся на расщеплении вектора потоков (flux vector splitting):
 замена $0.5(\mathbf{F}(\mathbf{U}_L) + \mathbf{F}(\mathbf{U}_R))$ на $\mathbf{F}(0.5(\mathbf{U}_L + \mathbf{U}_R))$

Линейное приближение (интенсивность начального разрыва невелика):

$$\mathbf{F}^{RS}(\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R) = 0.5[\mathbf{F}(\mathbf{U}_L) + \mathbf{F}(\mathbf{U}_R)] - 0.5 \sum_{i=1}^3 |\lambda_i| \alpha_i \mathbf{K}^{(i)}$$

Решатель Roe:

$$\mathbf{F}^{RS}(\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R) = 0.5[\mathbf{F}(\mathbf{U}_L) + \mathbf{F}(\mathbf{U}_R)] - 0.5 \sum_{i=1}^3 |\tilde{\lambda}_i| \tilde{\alpha}_i \tilde{\mathbf{K}}^{(i)}$$

Решатель HLL:

$$\mathbf{F}_* = \frac{S_R \mathbf{F}_L - S_L \mathbf{F}_R + S_R S_L (\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L)}{S_R - S_L}$$

Решатель Русанова (local Lax-Friedrichs flux):

$$\mathbf{F}_* = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_L + \mathbf{F}_R) - \frac{1}{2} S^{\max} (\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L)$$

